

GRADIENTE, LAPLACIANO, DIVERGENZA, ROTORE

Gradiente

INPUT: funzione scalare $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$
 OUTPUT: vettore

$$\text{Grad}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_d}(x) \right)$$

Laplaciano

INPUT: funzione scalare
 OUTPUT: funzione scalare

$$\Delta(f) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x)$$

In 2 variabili : $\Delta f = f_{xx} + f_{yy}$

" 3 " : $\Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$

Oss. Δf è la traccia della matrice HESSIANA

Divergenza

INPUT: funzione vettoriale $E: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$
 OUTPUT: funzione scalare $\text{div} E: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{div} E = \sum_{i=1}^d \frac{\partial E_i}{\partial x_i}(x)$$

i-esima componente del campo E

In 2 variabili $E = (A, B)$ $\text{div} E = A_x + B_y$

In 3 variabili $E = (A, B, C)$ $\text{div} E = A_x + B_y + C_z$

Rotore (oggetto specifico di $\mathbb{R}^3$)

INPUT : funzione vettoriale

$$E : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

OUTPUT : funzione vettoriale

$$\text{rot } E : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Si definisce sviluppando formalmente il Del

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A & B & C \end{pmatrix} \rightsquigarrow (C_y - B_z, A_z - C_x, B_x - A_y) =: \text{rot } E$$

Oss. In fisica spesso si fa il rotore anche di campi in dim 2, definito come

$$\text{rot } (A, B) := \text{rot } (A, B, 0) = (0, 0, B_x - A_y)$$

↑ ↑
dipendono
solo da x e y

Notazioni "dei fisici"

$$\text{Grad} = \nabla \quad \text{↖ nabla}$$

$$\Delta = \nabla^2$$

$$\text{div } E = \nabla \cdot E$$

$$\text{rot } E = \nabla \wedge E$$

↑

curl E in inglese

$$(\partial_x, \partial_y, \partial_z)$$

$$\partial_{xx} + \partial_{yy} + \partial_{zz}$$

$$(\partial_x, \partial_y, \partial_z) \cdot (A, B, C) = \dots$$

in fondo è quello che abbiamo fatto

— o — o —

Formule base

Assumendo regolarità quanto segue

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}(f)) = \Delta f$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}(f)) = \operatorname{div}(f_x, f_y, f_z) = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = \Delta f$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad}(f)) = \mathbf{0}$$

(inversione ordine di derivazione

↑
vettore

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}(\operatorname{grad}(f)) &= \operatorname{rot}(f_x, f_y, f_z) = (f_{yz} - f_{zy}, f_{zx} - f_{xz}, f_{xy} - f_{yx}) \\ &= (0, 0, 0)\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} * & * & * \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ f_x & f_y & f_z \end{array}$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}(E)) = \mathbf{0}$$

↑
numero

(ancora inversione ordine di derivazione)

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A & B & C \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rot} E = (C_y - B_z, A_z - C_x, B_x - A_y)$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} E) = C_{yx} - B_{zx} + A_{zy} - C_{xz} + B_{xz} - A_{yz}$$

Achtung! Molte combinazioni di operazioni NON hanno senso, ad esempio

$$\nabla(\operatorname{rot} E)$$

$$\operatorname{div}(\Delta f)$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{div} E)$$

Altre invece hanno senso

— 0 — 0 —

Gradiente nullo / uguale

→ Se $\nabla f(x) \equiv 0$, e Ω l'insieme di definizione è **CONNESSO** allora $f(x)$ è costante

→ Se $\nabla f_1(x) = \nabla f_2(x)$ in Ω , e Ω è CONNESSO, allora $f_1(x) - f_2(x) = \text{costante}$ in Ω

Rotore nullo / uguale

→ Se $\text{rot } E = 0$, e Ω l'insieme di definizione è **SEMP. CONN.** allora $E = \nabla f$ per una certa f .

$$\text{rot } E = (C_y - B_z, A_z - C_x, B_x - A_y) = (0, 0, 0)$$

allora

$$C_y = B_z$$

$$A_z = C_x$$

$$B_x = A_y$$

$$\leadsto \omega = A dx + B dx + C dz \text{ forma chiusa}$$

→ Se $\text{rot } E_1 = \text{rot } E_2$, e Ω l'insieme... è sempl. connesso, allora $E_1 = E_2 + \nabla f$

Oss. Se $E = (A, B, C)$ è il campo associato alla solita, allora $\text{rot } E = 0$, ma E non è ∇f su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Oss. Il rot dei fisici in dim 2 fa lo stesso mestiere per i campi 2 dimensionali

Finestra sul futuro: una eventuale generalizzazione del rot in dim d avrebbe $\binom{d}{2}$ componenti

Divergenza nulla / uguale

gratis nel caso
stellato

→ Se $\text{div } E = 0$, e l'insieme di definizione ha una certa propr.
allora $E = \text{rot } F$ per un certo campo F .

↑
"assenza di
buchi 3-dim"

→ Se $\text{div } E_1 = \text{div } E_2$ e ...
allora $E_1 = E_2 + \text{rot } F$

Oss. Per questi operatori valgono forme di calcolo simili a
quelle usuali

$$\text{div}(\underbrace{f}_{\text{funzione}} \underbrace{E}_{\text{campo}}) = \langle \nabla f, E \rangle + f \text{div } E$$

$$\begin{aligned} \text{div}(fA, fB, fC) &= f_x A + f A_x \\ &\quad + f_y B + f B_y \\ &\quad + f_z C + f C_z \\ &\quad \downarrow \qquad \downarrow \\ &\quad \langle \nabla f, E \rangle \quad f \text{div } E \end{aligned}$$

The slope of a scalar function has no curl.

$$\text{rot}(\nabla f) = 0$$

The curl of a vector function has no convergence.

$$\text{div}(\text{rot } E) = 0$$

The convergence of the slope of a scalar function is its concentration.

$$\text{div}(\nabla f) = \Delta f$$

The concentration of a vector function is the slope of its convergence, together with the curl of its curl.

↑ [Da MAXWELL: articolo originale in cui si introduce il termine
CURL (vedi CURL su WIKI in inglese)]

$$\text{rot}(\text{rot } E) = \pm(\Delta A, \Delta B, \Delta C) \pm \nabla(\text{div}(E))$$

[Fare per esercizio]