

Area di superfici cartesiane

$$\Phi(u, v) = (u, v, f(u, v)) \quad \text{con } (u, v) \in \Omega$$

$$J\Phi(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_u(u, v) & f_v(u, v) \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ Φ_u $\uparrow$ Φ_v

$$(M_1, M_2, M_3) = (-f_u(u, v), -f_v(u, v), 1)$$

$$\text{Area}(\Omega) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + f_u(u, v)^2 + f_v(u, v)^2} \, du \, dv$$

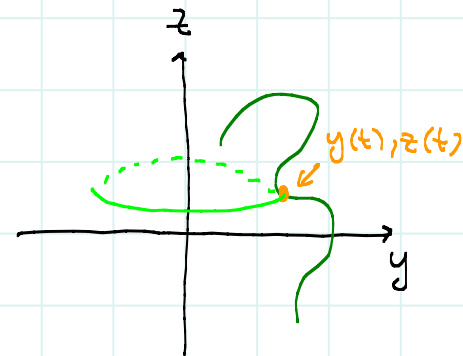
← analogo per le curve

$$\text{lunghezza} = \int \sqrt{1 + \dot{\phi}^2}$$

SUPERFICI DI ROTAZIONE

Consideriamo una curva nel piano y, z

$$\underbrace{(y(t), z(t))}_{\geq 0} \quad \text{con } t \in [a, b]$$



Ruoto tutto di 2π intorno all'asse z (o anche di un angolo α)
 Qual è la parametrizzazione della sup. che si ottiene

$$(y(t) \cos \theta, y(t) \sin \theta, z(t)) = \Phi(t, \theta)$$

← Fissato t , abbiamo tutti i punti ad altezza $z(t)$ che distano $y(t)$ dall'asse z .

$$\text{con } (t, \theta) \in [a, b] \times [0, 2\pi]$$

Dimostriamo che

$$\text{Area (Sup)} = 2\pi \int_a^b y(t) \sqrt{y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$$

e che vale il te. di Guldino 2, secondo cui

$$\text{Area (Sup)} = \text{lunghezza (curva)} \cdot \underbrace{2\pi y_G}_{\substack{\uparrow \\ \text{lunghezza della circ.} \\ \text{descritta dal baricentro} \\ \text{della curva durante la} \\ \text{rotazione}}}$$

Dim $\phi(t, \theta) = (y(t) \cos \theta, y(t) \sin \theta, z(t))$

Calcoliamo

$$J\phi(t, \theta) = \begin{pmatrix} \dot{y}(t) \cos \theta & -y(t) \sin \theta \\ \dot{y}(t) \sin \theta & y(t) \cos \theta \\ \dot{z}(t) & 0 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo

$$(M_1, M_2, M_3) = (-\dot{z}(t) y(t) \cos \theta, \dot{z}(t) y(t) \sin \theta, y(t) \dot{y}(t))$$

quindi $\| (M_1, M_2, M_3) \| = \{ \dot{z}(t)^2 y(t)^2 \cos^2 \theta + \dot{z}(t)^2 y(t)^2 \sin^2 \theta + y(t)^2 \dot{y}(t)^2 \}^{1/2}$

$$= \{ \dot{z}(t)^2 y(t)^2 + \dot{y}(t)^2 y(t)^2 \}^{1/2}$$

$$= y(t) \sqrt{\dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}$$

$\uparrow$
non mette il val. assol. perché
avevamo supposto $y(t) \geq 0$

Integrando abbiamo

$$\begin{aligned} \text{Area} &= \int_a^b dt \int_0^{2\pi} d\sigma \, y(t) \sqrt{\dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} \\ &= 2\pi \int_a^b y(t) \sqrt{\dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} dt \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{era } \alpha \text{ se ruotavamo di un} \\ &\quad \text{angolo } \alpha \end{aligned}$$

Da qui a Guldino 2 Il baricentro della curva è il punto (y_G, z_G) con

$$\begin{aligned} y_G &= \frac{1}{\text{lunghezza}(\sigma)} \int_{\sigma} y \, ds \\ &= \frac{1}{\text{lunghezza}(\sigma)} \int_a^b y(t) \underbrace{\sqrt{\dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}}_{\text{speed}} dt \end{aligned}$$

Da qui è ovvio che

$$2\pi y_G \cdot \text{lunghezza}(\sigma) = \text{Area}(\text{Sup})$$

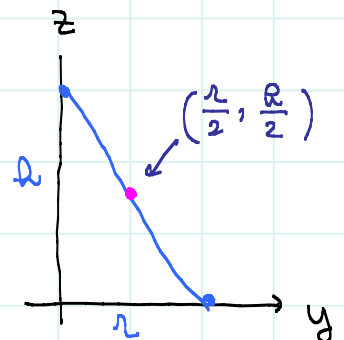
— o — o —

Soliti esempi

→ Sup. laterale del cono

$$\text{Area} = \text{lunghezza}(\sigma) \cdot 2\pi y_G$$

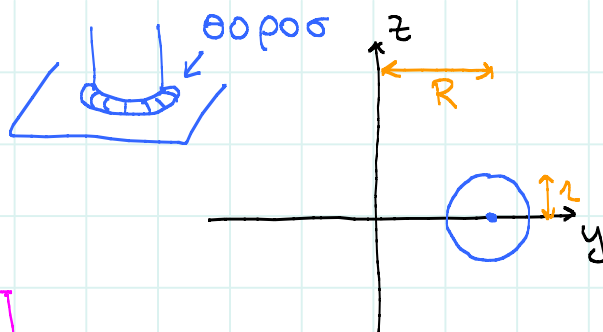
$$= \sqrt{R^2 + r^2} \cdot 2\pi \frac{r}{2} = \pi r \sqrt{R^2 + r^2}$$



→ Sup. laterale del toro

$$\text{Area} = \text{lunghezza}(\sigma) \cdot 2\pi y_G$$

$$= 2\pi r \cdot 2\pi R = 4\pi^2 r R$$

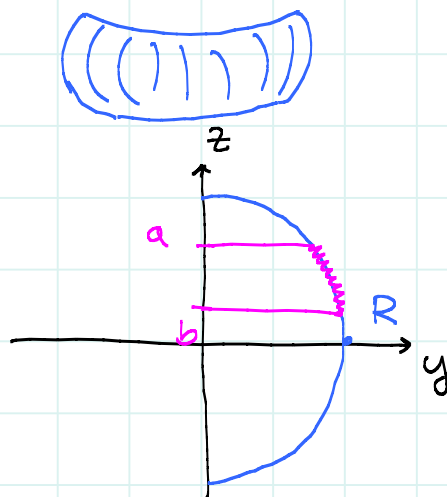


→ Area del segmento sferico

Usiamo la formula

$$\text{Area} = 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} y(t) \sqrt{\dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} dt$$

$$(y(t), z(t)) = (R \cos \theta, R \sin \theta) \\ \text{con } \theta \in [\theta_1, \theta_2]$$



$$= 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} R \cos \theta \cdot R d\theta = 2\pi R^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos \theta d\theta$$

$$= 2\pi R^2 (\sin \theta_2 - \sin \theta_1)$$

$$= 2\pi R (R \sin \theta_2 - R \sin \theta_1)$$

$$= 2\pi R (a - b)$$

Caso speciale : $a = R$ e $b = -R$ e si ottiene

$$\text{Area (Sup. sfera)} = 4\pi R^2$$

— 0 — 0 —

INTEGRALI SUPERFICIALI

1 Notazioni

$$\int_S f(x, y, z) d\sigma$$

→ S è il sostegno di una superficie (sarebbe più corretto $\int_\Phi$)

→ $f(x, y, z)$ è una funzione di 3 variabili definita almeno sul sostegno della superficie

→ $d\sigma$ sta ad indicare l'integrale superficiale.

2-3 Significato e definizione ... si fanno le somme inferiori e superiori

Area parallelogrammo. Max/min di $f(\Phi(u, v))$

↑
corrispondente ad un rettangolo in Ω

↑
nello stesso rettangolo di Ω

Si passa al limite infittendo la rettangolarizzazione.

4 Formula per il calcolo nel caso regolare

$$\int_\Phi f(x, y, z) d\sigma = \int_\Omega f(\Phi(u, v)) \|\Phi_u \wedge \Phi_v\| du dv$$

Esercizio Calcolare il baricentro di una semisfera come superficie (è più alto rispetto alla semisfera come solido) e viene esattamente a metà del raggio

[Parametrizzare in sferiche e calcolare $\Phi_u \wedge \Phi_v$]

— o — o —