

SUPERFICI NELLO SPAZIO

Tre tipi di presentazione:

→ cartesiana

→ implicita

→ parametrica

Cartesiana Grafico di una funzione $z = f(x, y)$ dove
 $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}^2$

Implicita Definita come luogo di zeri $g(x, y, z) = 0$
 sotto certe ipotesi su g .

PARAMETRICA Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un insieme. Una superficie è una
 funzione

$$\Phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\Phi(u, v) = (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v))$$

Si definisce **sostegno** di una superficie l'immagine di Φ , dunque

$$\text{sostegno}(\Phi) = \{ \Phi(u, v) \in \mathbb{R}^3 : (u, v) \in \Omega \}$$

Oss. La cartesiana rientra ponendo

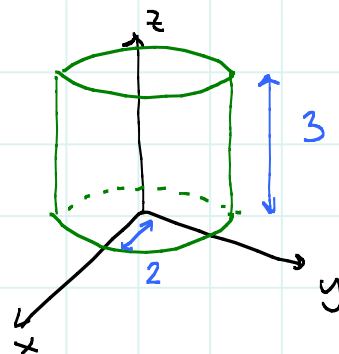
$$\Phi(u, v) := (u, v, f(u, v)) \quad (u, v) \in \Omega.$$

Esempio 1 Il cilindro in figura è sostegno della superficie

$$\Phi(u, v) = (2 \cos u, 2 \sin u, v)$$

$$\text{con } \Omega = [0, 2\pi] \times [0, 3]$$

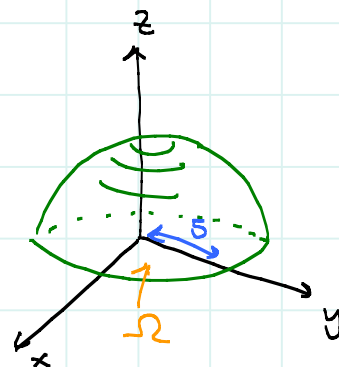
$\underbrace{\quad}_u \quad \underbrace{\quad}_v$



Esempio 2 Semisfera alta di raggio 5

$$\Phi(u, v) = (u, v, \sqrt{25 - u^2 - v^2}) \quad \uparrow \text{param. cartesiana}$$

$$\text{con } \Omega = \{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 25 \}$$



In alternativa posso usare le sfere. In versione geografica sarebbe

$$\Phi(u, v) = (5 \cos v \cos u, 5 \cos v \sin u, 5 \sin v)$$

$$\text{con } \Omega = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi]$$

$\underbrace{\quad}_u \quad \underbrace{\quad}_v$
 $\uparrow$ latitudine $\uparrow$ longitudine
 — 0 — 0 —

PIANO TANGENTE

Nel caso cartesiano è il piano di equazione

primi 2 termini di Taylor nello sviluppo di $f(x, y)$

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

viene dalla definizione di differenziale

$\uparrow$ ha senso se $\nabla f(x_0, y_0)$ esiste

Piano tangente nel p.to $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

Nel caso implicito $g(x, y, z) = 0$, il piano tangente in un p.to generico (x_0, y_0, z_0) della superficie è

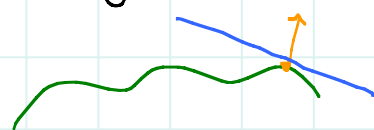
$$g_x(x_0, y_0, z_0)x + g_y(x_0, y_0, z_0)y + g_z(x_0, y_0, z_0)z = \text{qualcosa}$$

↑
fatto in modo
che (x_0, y_0, z_0) lo
soddisf.

$$g_x(x_0, y_0, z_0)(x-x_0) + g_y(\dots)(y-y_0) + g_z(\dots)(z-z_0) = 0$$

È come dire che $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ è $\perp$ al piano tangente.

[Tutto ciò ha senso se $\nabla g(x_0, y_0, z_0) \neq 0$]



Caso parametrico Presumiamo $(u_0, v_0) \in \Omega$ e vogliamo il piano tangente nel punto $\Phi(u_0, v_0)$.

Il piano è dato in parametrica

$$\Phi(u_0, v_0) + t \Phi_u(u_0, v_0) + s \Phi_v(u_0, v_0)$$

Ha senso quando Φ_u e Φ_v esistono, quindi $\Phi_u(u_0, v_0)$ e $\Phi_v(u_0, v_0)$ devono essere LINEARMENTE INDIPENDENTI, il che è equivalente a dire che la matrice jacobiana di Φ ha rang max (cioè 2)

$$J\Phi(u, v) = \begin{pmatrix} x_u(u, v) & x_v(u, v) \\ y_u(u, v) & y_v(u, v) \\ z_u(u, v) & z_v(u, v) \end{pmatrix}$$

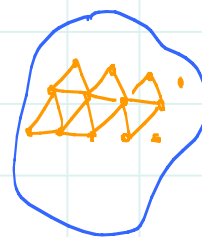
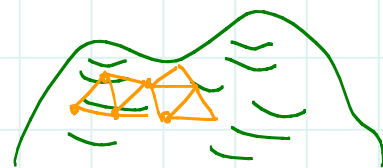
$\uparrow$ $\uparrow$
 $\Phi_u(u, v)$ $\Phi_v(u, v)$
 — 0 — 0 —

AREA DI UNA SUPERFICIE

Facciamo il caso parametrico.

Con le curve si passava per le poligonalì.

L'analogo qui sarebbe "triangolare la sup",
poi sommare le aree dei triangoli, e
passare al limite o al sup
"infinitendo la triangolazione"



$\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$

PORTROPPO IL SUP È PRATICAMENTE
SEMPRE $+\infty$

Il controesempio classico è la lanterna di SCHWARZ (googleare) in
cui c'è un effetto pisanonica che fa esplodere l'area.

Definizione di funzione

→ Rettangolo Ω

→ In ogni rettangolo scelgo un p.to

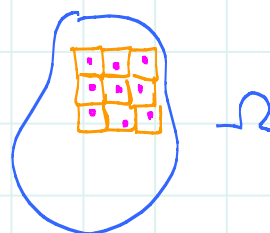
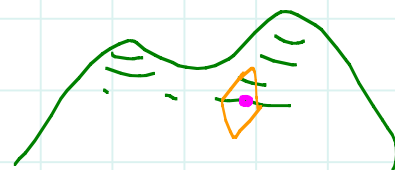
→ In ogni rettangolo approssimo ϕ
con il suo Taylor di ordine 1 calcolato
nel p.to prescelto

→ Calcolo l'immagine del rettangolo mediante l'approssimazione

→ Approssimo il sostegno della superficie con dei parallelogrammi
contenuti in un po' di piani tangenti

→ Algebra Lineare $\rightsquigarrow$ aree di questi parallelogrammi

→ Sommo tutto e passo al limite.



Formula per il calcolo

$$\text{Area}(\Phi) = \int_{\Omega} \sqrt{M_1^2(u,v) + M_2^2(u,v) + M_3^2(u,v)} \, du \, dv$$

dove M_1, M_2, M_3 sono i 3 minori 2×2 di $J\Phi(u,v)$.

Più precisamente

$$M_1 = Y_u Z_v - Y_v Z_u$$

← cancello prima riga

$$M_2 = Z_u X_v - Z_v X_u$$

$$M_3 = X_u Y_v - X_v Y_u$$

Quindi

$$\text{Area}(\Phi) = \int_{\Omega} \|\Phi_u(u,v) \wedge \Phi_v(u,v)\| \, du \, dv$$

Cosa che ci sta sotto: se $a, b \in \mathbb{R}^3$, allora

$\|a \wedge b\|$ = area parallelogramma spannato da a e b

— o — o —