

LA SOLITA

$$\omega = \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$$

Definita in $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ω è CHIUSA

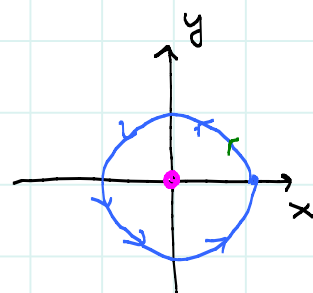
$$A_y = \frac{-(x^2+y^2) - 2y(-y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$B_x = \frac{x^2+y^2 - 2x \cdot x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

:

 ω NON È ESATTA di Ω Come dimostro non esattezza?

→ spero che non chiusa (ma qui invece lo è)

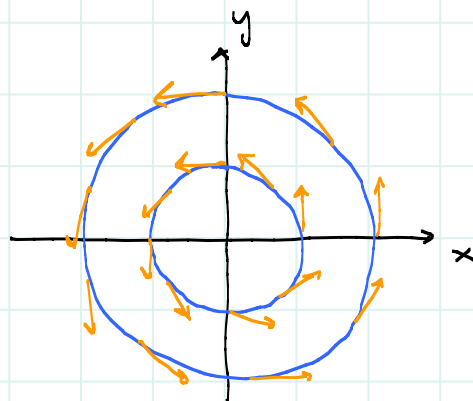
→ trovo una curva γ chiusa su cui $\int_{\gamma} \omega \neq 0$ Uso $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ con $t \in [0, 2\pi]$

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^{2\pi} \left\{ \underbrace{(-\sin t)}_{-y} \underbrace{(-\sin t)}_{\dot{x}} + \underbrace{\cos t}_{x} \cdot \underbrace{\cos t}_{\dot{y}} \right\} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = 2\pi \neq 0.$$

Curiosità geometrica Come è fatto il campo $\vec{E} = (A, B)$?

Osservo che $(-y, x)$ è (x, y)
 ruotato di 90° in verso
 antiorario



Interpretazione ciclistica

Se faccio un giro chiuso in bici e ho sempre il vento contro, allora il vento non è gradiente di un potenziale!

$$\int_{\gamma} \underbrace{\langle \vec{E}, \dot{\gamma} \rangle}_{<0} dt < 0 \Rightarrow \text{forma non esatta}$$

— 0 — 0 —

ω è ESATTA su $x > 0$ ← è un semipiano, quindi convesso, quindi sempl. conn.

Una primitiva per esempio è

$$V(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$$

$$V_x = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \left(-\frac{y}{x^2} \right) = A(x, y)$$

$$V_y = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} = B(x, y)$$

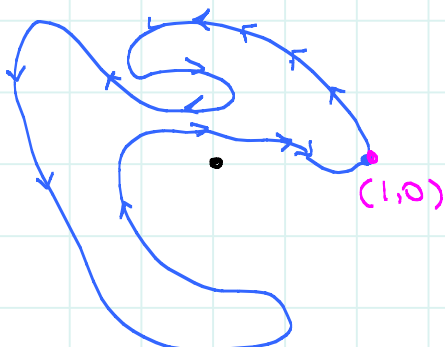
ω è ESATTA su $x < 0$ La stessa primitiva funziona

ω è ESATTA su $y > 0$ e su $y < 0$ Stessi ragionamenti e volendo una primitiva è

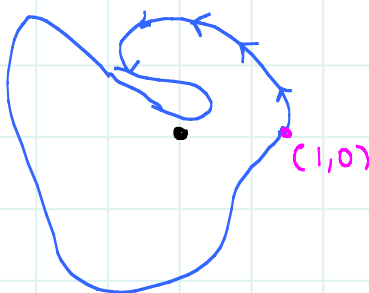
$$V(x, y) = -\arctan \frac{x}{y}$$

ω è ESATTA su $\mathbb{R}^2 \setminus \text{semiretta } x \text{ negative}$

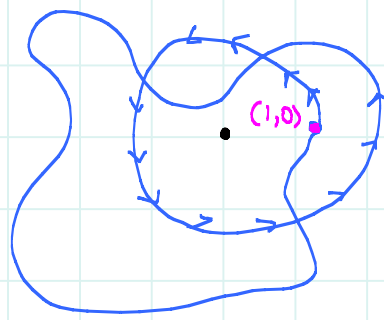
L'insieme è stellato rispetto a $(1, 0)$
quindi anche qui c'è una primitiva



$$\int_{\gamma} \omega = 0$$



$$\int_{\gamma} \omega = 2\pi$$



$$\int_{\gamma} \omega = 4\pi$$

La prima curva è omotopa ad una curva costante $\Rightarrow \int = 0$

La seconda curva è omotopa alla circ. di prima

terza

" " che fa 2 giri, quindi
l'integrale raddoppia.

Fatto Ogni forma su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ che sia chiusa ma non
esatta si può scrivere come

$$\omega = \alpha \omega_{\text{solita}} + \omega_2$$

$\uparrow$ $\uparrow$
numero esatta

Fatto da cui segue Se su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ abbiamo una forma chiusa,
allora questa è esatta se e solo se

$$\int_{\gamma} \omega = 0$$

$\uparrow$
circonferenza che
gira intorno al
buco

Idea: Le possibili curve chiuse o non girano intorno al buco,
o sono omotope ad un multiplo della solita circouf.

A quel p.to basta scegliere α in modo tale che

$$\int_{\gamma} \omega = \alpha \int_{\gamma} \omega_{\text{solita}}$$

$\uparrow$ $\uparrow$



La differenza $\omega - \alpha \omega_{\text{solita}}$ ricade nel secondo fatto.

TRE strategie per calcolare $\int_{\gamma} \omega$

① Uso direttamente la def.

in un insieme che contiene il supp. di γ

② Spero che ω sia esatta, quindi calcolo una primitiva, e faccio la diff. tra i valori agli estremi

③ Spero che ω sia chiusa, e sostituisco γ con una nuova curva omotopa, che spero essere più semplice.

Esempio $\omega = x dx + y dy$

Chiusa, definita su $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$ esatta $V(x,y) = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} y^2$

$$\omega = x^2 y^3 dx + \alpha x^3 y^2 dy$$

Per quali valori di α è esatta?

$$A_y = 3x^2 y^2 \quad B_x = 3\alpha x^2 y^2$$

- Se $\alpha \neq 1$ allora ω non è chiusa e quindi non esatta
- Se $\alpha = 1$, allora è chiusa + definita su $\mathbb{R}^2$, quindi esatta

$$V(x,y) = \frac{1}{3} x^3 y^3$$

$$\omega = \frac{x}{x^2+y^2} dx + \frac{y}{x^2+y^2} dy$$

Facendo il conto si vede che è chiusa e definita su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Testiamo sulla solita circonferenza $(\cos t, \sin t)$ con $t \in [0, 2\pi]$

$$\int_0^{2\pi} \cos t (-\sin t) + \sin t \cdot \cos t dt = 0$$

Quindi deve essere esatta. Una primitiva è

$$V(x, y) = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2)$$

$$\omega = 3x^2y dx + (x^3 + e^{-y^2}) dy$$

$$\gamma(t) = (t \sin t, t(\pi - t)) \quad t \in [0, \pi]$$

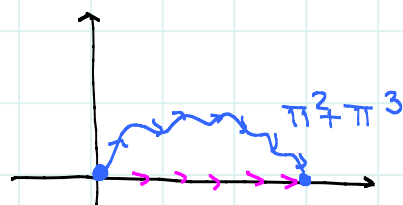
$$\int_{\gamma} \omega = 0 \quad (\text{curva è chiusa e } \omega \text{ è chiusa, quindi esatta su } \mathbb{R}^2)$$

$$\gamma(t) = (t^2 + t^3, t(\pi - t)) \quad t \in [0, \pi]$$

La curva non è più chiusa 😞, quindi devo calcolare la primitiva

$$V(x, y) = x^3y + \text{primitiva di } e^{-y^2} \quad \ddot{\smile}$$

Proviamo la ③



ω è chiusa, quindi cambio curva

usando la rettilinearia $(t, 0)$ con $t \in [0, \pi^2 + \pi^3]$ e

su questa il conto è banale e viene 0.

— o — o —

(in alternativa potrei lasciar indicata la primitiva)

— o — o —