

Forma diff. $\omega = \sum_{i=1}^d A_i(x) dx_i$ $A_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$

Integrale di ω su γ Se $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, allora

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \left\{ \sum_{i=1}^d A_i(\gamma(t)) \dot{\gamma}_i(t) \right\} dt$$

Si intende che γ è almeno continua + C^1 a tratti ($[a, b]$ è unione di un numero finito di intervalli su cui γ è di classe C^1).

Definizioni chiave Una forma diff. ω si dice

ESATTA in Ω se esiste $V: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$A_i(x) = \frac{\partial V}{\partial x_i}(x) \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, d$$

La $V(x)$ si dice PRIMITIVA di ω

Oss. Se identifichiamo ω con il campo $\vec{E}(x) = (A_1(x), \dots, A_d(x))$, allora ω è esatta se e solo se $\vec{E} = \nabla V$. In tal caso possiamo chiamare V il POTENZIALE

Oss. È importante dire esatta "dove", cioè ω può essere esatta in un certo Ω_1 , ma non in un altro Ω_2 . (Può anche essere esatta in Ω_1 e Ω_2 , ma non in $\Omega_1 \cup \Omega_2$)

CHIUSA se i coeff. sono di classe C^1 e vale

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial A_j}{\partial x_i}(x) \quad \forall i \neq j \quad (\text{le derivate in croce sono uguali})$$

Caso $d=2$ $\omega = A(x,y) dx + B(x,y) dy$

Chiusa

$$\frac{\partial A}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial B}{\partial x}(x,y)$$

Esatta:

$$A(x,y) = V_x(x,y)$$

$$B(x,y) = V_y(x,y)$$

Caso $d=3$

$$\omega = A(x,y,z) dx + B(\dots) dy + C(\dots) dz$$

Esatta:

$$A = V_x$$

$$B = V_y$$

$$C = V_z$$

Chiusa:

$$A_y = B_x$$

$$A_z = C_x$$

$$B_z = C_y$$

Implicazione facile

$$\omega \text{ ESATTA} \Rightarrow \omega \text{ CHIUSA}$$

(se i coeff. sono almeno C^1)

Dim

$$\text{Se } A_i = V_{x_i}$$

$$A_j = V_{x_j}, \text{ allora}$$

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_j} = V_{x_i x_j}$$

$$\frac{\partial A_j}{\partial x_i} = V_{x_j x_i}$$

quindi si tratta dell'inversione dell'ordine di derivazione.

[In due variabili: $A = V_x$ e $B = V_y$, allora $A_y = V_{xy}$
 $B_x = V_{yx}$]

Corollario

$$\omega \text{ NO CHIUSA} \Rightarrow \omega \text{ NO ESATTA} \Rightarrow \text{ADDIO PRIMITIVA}$$

Prop (Conseguenza dell'esattezza)

Sia ω una forma ESATTA. Allora per ogni curva C^1 (o anche C^1 tratti) vale che

$$\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^d$$

$$\int_{\gamma} \omega = V(\gamma(b)) - V(\gamma(a))$$

Differenza tra valori della primitiva agli estremi

Def.

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \left\{ \sum_{i=1}^d A_i(\gamma(t)) \dot{\gamma}_i(t) \right\} dt$$

$$= \int_a^b \left\{ \sum_{i=1}^d \frac{\partial V}{\partial x_i}(\gamma(t)) \dot{\gamma}_i(t) \right\} dt$$

uso
 ω è esatta

$$\text{CHAIN RULE} \nearrow = \int_a^b \frac{d}{dt} [V(\gamma(t))] dt$$

$$= V(\gamma(b)) - V(\gamma(a))$$

Analisi 1:

integrale di una
derivata

- Esercizio
- Riscrive esplicitamente il conto con $d=2$ e $d=3$
 - Estendere al caso di curve C^1 a tratti, e capire dove serve la continuità.

— o — o —

Teorema (Caratterizzazione dell'esattezza)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ e sia ω una forma diff. definita in Ω .

Allora i seguenti 3 fatti sono equivalenti

(i) ω è esatta come da definizione (esiste primitiva)

(ii) vale che

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

per ogni coppia di curve a valori in Ω con gli stessi estremi.

(quindi l'integrale su una curva dipende solo dagli estremi)

(iii) vale che

$$\int_{\gamma} \omega = 0$$

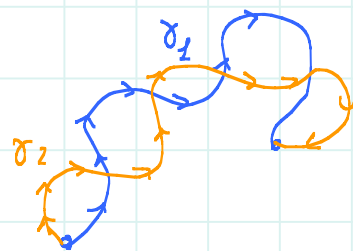
per ogni curva a valori in Ω che sia chiusa.

Dim.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) è quasi ovvia. Uso $\gamma_1 =$ curva γ chiusa data e come γ_2 la curva costantemente uguale all'estremo, su cui chiaramente l'integrale è nullo, perché $\dot{\gamma}(t) \equiv 0$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Sia γ_1 e γ_2 due curve con gli stessi estremi.

Considero la curva γ_3 che fa γ_1 e poi γ_2 al contrario. Allora γ_3 è chiusa, quindi



$$0 = \int_{\gamma_3} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2 \text{ al contr.}} \omega = \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega$$

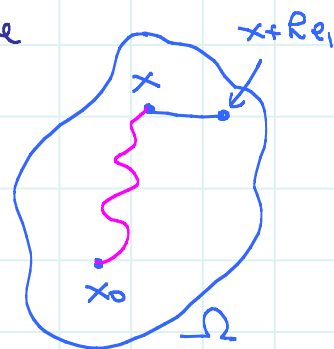
$\uparrow$
ipotesi (ii)

da cui si ottiene la (ii).

(i) $\Rightarrow$ (ii) Segue dalla prop. precedente.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Per ipotesi l'integrale dipende solo dagli estremi e non dalla curva. Devo dim. che esiste una primitiva.

Scelgo $x_0 \in \Omega$ a piacimento e per ogni $x \in \Omega$ pongo



$$V(x) := \int_{\gamma} \omega$$

$\uparrow$
curva qualunque (C^1 a tratti)
che unisce x_0 a x

Devo dimostrare che $\frac{\partial V}{\partial x_i}(x) = A_i(x)$.

Lo faccio per $i=1$.

$$\frac{\partial V}{\partial x_1}(x) = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{V(x + R e_1) - V(x)}{R}$$

Ora come calcolo $V(x + R e_1)$?

Potendo scegliere la curva, uso quella che andava bene per x più il segmento tra x e $x + R e_1$, cioè

$$\gamma_2(t) := x + t R e_1 \quad \text{con } t \in [0, 1]$$

$$\begin{aligned} V(x + R e_1) &= \int_{\gamma} \omega + \int_{\gamma_2} \omega \\ &= V(x) + \int_0^1 A_1(x + t R e_1) R \, dt \end{aligned}$$

$$= V(x) + R A_1(x + c R e_1)$$

↑
teo. media
integrale di Analisi 1

↑
composto
tra 0 e 1

(Ho usato che
 $\dot{\gamma}_i(t) \equiv 0$
per $i = 2, \dots, d$

$$\text{e } \dot{\gamma}_1(t) = R$$

Ma allora

$$\frac{V(x + R e_1) - V(x)}{R} = A_1(x + c R e_1) \rightarrow A_1(x)$$

↑
dipende da R , ma
 $c R e_1 \rightarrow 0$ (vettore)
quando $R \rightarrow 0$

Come richiesto.

— o — o —