

## FORME DIFFERENZIALI

Non def. (da corso di servizio)

Una forma differenziale è un oggetto che si presenta nella forma

$$\omega = A(x,y) dx + B(x,y) dy \quad \text{in due variabili}$$

↑  
omega  
piccolo

$$\omega = A(x,y,z) dx + B(x,y,z) dy + C(x,y,z) dz \quad \text{in 3 variabili}$$

e analogo in più di 3 variabili

Le funzioni  $A, B, C$  si chiamano coeff. della forma diff., e sono funzioni definite in un certo insieme del piano o dello spazio.

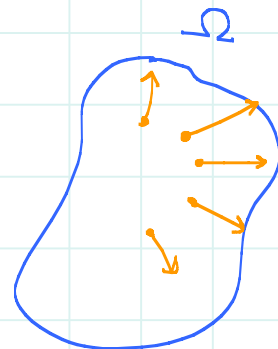
Def. Un campo di vettori in  $\mathbb{R}^d$  è una funzione

$$E: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$$

dove  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ .

Esempio Se  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  un campo di vettori vuole dire assegnare un vettore in ogni punto

$$\vec{E}(x,y) = (A(x,y), B(x,y))$$



Possiamo ABUSIVAMENTE identificare forme diff. e campi di vettori

# Integrale di una forma diff. lungo una curva

INTEGRAZIONE  
ORIENTATA

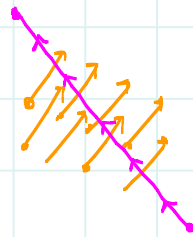
- 1 Setting : sia  $\omega$  una forma diff. in  $\mathbb{R}^d$   
sia  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$  una curva il cui sostegno  
è contenuto nell'insieme in cui sono def. i coeff.  
della forma

$$\int_{\gamma} \omega$$

In due variabili diventa

$$\int_{\gamma} A(x, y) dx + B(x, y) dy$$

- 2 Significato fisico Caso di  $\mathbb{R}^2$  in cui  $\vec{E} = (A, B)$  è  
un campo costante e  
 $\gamma$  è una curva che percorre un segmento  
a velocità costante  $\vec{V}$



Il lavoro del campo sul punto che si muove è

$$\langle \vec{V}, \vec{E} \rangle \text{ lungo segmento} = \int_{\gamma} \omega \quad \uparrow \quad A dx + B dy$$

Questa è l'idea che si vuole  
tradurre con la definizione

- 3 Idea della definizione. Approssimare la curva con una spezzata  
e in ogni tratto considerare costanti i coeff. e la velocità, e  
sommare i contributi come sopra

#### 4 Formula per il calcolo

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) \quad t \in [a, b]$$

$$\int_{\gamma} A(x, y) dx + B(x, y) dy$$

$$= \int_a^b \{A(x(t), y(t)) \dot{x}(t) + B(x(t), y(t)) \dot{y}(t)\} dt$$

Nota bene: stiamo integrando il prodotto scalare tra

$$\vec{E}(x, y) = (A(x, y), B(x, y)) \quad \text{e} \quad \vec{V} = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$$

#### Relazione tra integrale di funzioni e di forme

Posso scrivere

$$\int_{\gamma} A dx + B dy = \int_a^b \left\{ A(x(t), y(t)) \frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}} + B(\dots) \frac{\dot{y}(t)}{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dots}} \right\} \cdot \underbrace{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt}_{ds}$$

*versore tangente*

$$= \int_{\gamma} \langle \vec{E}, \text{versore tangente} \rangle ds$$

#### INTEGRAZIONE ORIENTATA

→ Se percorro la curva al contrario, l'integrale cambia segno

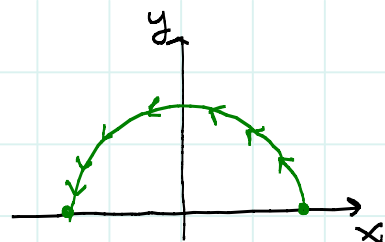
→ Se faccio avanti / indietro, i due contributi si cancellano

— o — o —

Esempio 1

$$\omega = (x+y) dx - y dy$$

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, \pi]$$



Uso la formula

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^{\pi} \left\{ \underbrace{(\cos t + \sin t)}_{x+y} \underbrace{(-\sin t) dt}_{\dot{x}(t)} - \underbrace{\sin t}_{y} \underbrace{\cos t}_{\dot{y}(t)} \right\} dt$$

$$= \int_0^{\pi} \{-\sin^2 t - 2 \cos t \sin t\} dt = -\frac{\pi}{2} + [\cos^2 t]_{t=0}^{t=\pi} = -\frac{\pi}{2}$$

Consideriamo ora la curva  $\gamma_1(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$   $t \in [-1, 1]$

Osservo che  $\gamma_1$  percorre lo stesso sostegno, una sola volta, ma in verso opposto. Quindi

$$\int_{\gamma_1} \omega = \frac{\pi}{2} \quad \ddot{\smile}$$

Ufficialmente avrei dovuto fare

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \left\{ \underbrace{(t + \sqrt{1-t^2})}_{x+y} \underbrace{1 dt}_{\dot{x}(t)} - \underbrace{\sqrt{1-t^2}}_y \underbrace{\frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}}}_{\dot{y}(t)} \right\} dt \\ &= \int_{-1}^1 (2t + \sqrt{1-t^2}) dt = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

**FATTO IMPORTANTE** Se  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  percorrono lo stesso sostegno  nello stesso verso , allora

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

Può anche fare avanti / indietro in alcuni tratti.

NON STIAMO DICENDO che dipende solo dagli estremi, ma dipende solo dal sostegno e dal verso di percorrenza

Per l'integrale delle funzioni è importante percorrere lo stesso sostegno (in qualunque verso), ma facendo una volta sola ogni tratto.

Idea che ci sta sotto... quando cambio la parametrizz., cioè considero la curva

$$\gamma(\varphi(t))$$

allora 
$$\int_Y d(x(\varphi(t))) = \int_Y \dot{x}(\varphi(t)) \dot{\varphi}(t) dt$$

↑ questo è quello che serve per il cambio di variabili negli integrali

Lo stesso cambio nella speed fa uscire  $|\dot{\varphi}(t)|$

↑ ↑  
fa la differenza

— o — o —