

Obiettivo: dimostrare che

$$\text{lunghezza}(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

per ogni curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ di classe C^1 .
— o — o —

INTEGRALI DI FUNZIONI VETTORIALI

Setting: $A \subseteq \mathbb{R}^k$ ($k=1,2,3$) $f: A \rightarrow \mathbb{R}^d$
 $\uparrow \uparrow$

$$\int_A f(x) dx = \left(\int_A f_1(x) dx, \dots, \int_A f_d(x) dx \right)$$

dove $f(x) = (f_1(x), \dots, f_d(x))$

Teorema 1 (Stima dall'alto) Setting come sopra.

Allora

$$\left\| \int_A f(x) dx \right\| \leq \int_A \|f(x)\| dx$$

$\uparrow$
norma di un
vettore

$\uparrow$
integrale di una
funzione scalare

Analogo di Analisi 1: $\left| \int_A f(x) dx \right| \leq \int_A |f(x)| dx$

Dim per dualità

Considero un qualunque vettore $v \in \mathbb{R}^d$

Allora

int. è lineare

$$\langle v, \int_A f(x) dx \rangle = \sum_{i=1}^d v_i \int_A f_i(x) dx \stackrel{\text{int. è lineare}}{=} \int_A \sum_{i=1}^d v_i f_i(x) dx = \int_A \langle v, f(x) \rangle dx$$

Adesso metto i moduli:

$$\begin{aligned} \left| \left\langle v, \int_A f(x) dx \right\rangle \right| &= \left| \int_A \langle v, f(x) \rangle dx \right| \\ &\stackrel{\text{Analisi 1}}{\leq} \int_A |\langle v, f(x) \rangle| dx \\ &\stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \int_A \|v\| \cdot \|f(x)\| dx \\ &= \|v\| \int_A \|f(x)\| dx \end{aligned}$$

Ora scelgo un v speciale e cioè $v := \int_A f(x) dx$. Otengo

$$\left\| \int_A f(x) dx \right\|^2 \leq \left\| \int_A f(x) dx \right\| \cdot \int_A \|f(x)\| dx$$

Ora distinguo 2 casi:

→ se $\left\| \int_A f(x) dx \right\| = 0$, c'era davvero poco da dire. ☺

→ se $\left\| \int_A f(x) dx \right\| > 0$, divido e ho la tesi.
— 0 — 0 —

Esercizio Dimostrare lo stesso risultato con un'altra norma a scelta (vale per tutte le norme).
— 0 — 0 —

Teorema 2 (Stima dal basso) Stesso setting.

Allora per ogni $x_0 \in A$ vale la stima

$$\left\| \int_A f(x) dx \right\| \geq \int_A \|f(x)\| dx - 2 \int_A \|f(x) - f(x_0)\| dx$$

Dim La partenza è aggiungere e togliere
 $f(x) = f(x_0) + f(x) - f(x_0)$

Ora faccio due operazioni in due modi diversi

① Triangolo + Integro

$$\|f(x)\| \leq \|f(x_0)\| + \|f(x) - f(x_0)\|$$

$$\begin{aligned} \int_A \|f(x)\| dx &\leq \int_A \|f(x_0)\| dx + \int_A \|f(x) - f(x_0)\| dx \\ &= \|f(x_0)\| \cdot \text{misura}(A) + \int_A \|f(x) - f(x_0)\| dx \end{aligned}$$

② Integro e poi triangolo dalla parte opposta

$$\int_A f(x) dx = \int_A f(x_0) dx + \int_A (f(x) - f(x_0)) dx$$

$$\left\| \int_A f(x) dx \right\| \geq \left\| \int_A f(x_0) dx \right\| - \left\| \int_A (f(x) - f(x_0)) dx \right\|$$

Ho usato che se $a = b + c$, allora $\|a\| \geq \|b\| - \|c\|$
 $b = a - c \leadsto \|b\| \leq \|a\| + \|c\|$

$$= \|f(x_0)\| \cdot \text{misura}(A) - \left\| \int_A (f(x) - f(x_0)) dx \right\|$$

$$\geq \underbrace{\|f(x_0)\| \cdot \text{misura}(A)}_{\substack{\text{lo ricavo dalla} \\ \text{precedente}}} - \int_A \|f(x) - f(x_0)\| dx$$

Uso stima
dall'atto con il
segno - davanti

$$\geq \int_A \|f(x)\| dx - 2 \int_A \|f(x) - f(x_0)\| dx$$

— 0 — 0 —

Dim. Lungh. curva

Devo dimostrare due cose

① Per ogni partizione $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$ si ha che

$$\underbrace{\sum_{i=1}^n \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|}_{\text{Lungh. della poligonale}} \leq \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

② Per ogni $\varepsilon > 0$ posso trovare una partizione t.c.

$$\sum_{i=1}^n \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \geq \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt - \varepsilon$$

Dim di ① L'osservazione fondamentale è che

$$\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{\gamma}(t) dt \quad (\text{sono vettori})$$

↑
è vero component-wise

Metto le norme

$$\|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| = \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{\gamma}(t) dt \right\| \leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

↑
stimare dall'alto

Sommando su i , a dx trovo l'integrale su $[a, b]$.

Dim di ② Idea: prendere i t_i "abbastanza vicini"

Qui uso l'uniforme continuità di $\dot{\gamma}(t)$.

Dato $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ t.c.

$$|t_1 - t_2| \leq \delta \Rightarrow \|\dot{\gamma}(t_1) - \dot{\gamma}(t_2)\| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

Prendo ora una partizione con $|t_i - t_{i-1}| \leq \delta$ per ogni $i=1, \dots, n$

Su ogni uso la stima dal basso con $A = [t_{i-1}, t_i]$ e punto $x_0 = t_i$ (ma ogni altro punto avrebbe bene)

$$\begin{aligned}
 \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| &= \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{\gamma}(t) dt \right\| \\
 &\geq \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\dot{\gamma}(t)\| dt - 2 \int_{t_{i-1}}^{t_i} \underbrace{\|\dot{\gamma}(t) - \dot{\gamma}(t_i)\|}_{\substack{|t-t_i| \leq \delta, \\ \text{quindi si stimare} \\ \|\dot{\gamma}(t) - \dot{\gamma}(t_i)\|}} dt \\
 &\geq \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\dot{\gamma}(t)\| dt - \cancel{2} (t_i - t_{i-1}) \frac{\varepsilon}{\cancel{2}(b-a)}
 \end{aligned}$$

Quando sommo su i ottengo

$$\sum_{i=1}^m \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \geq \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt + \frac{\varepsilon}{b-a} \underbrace{\sum_{i=1}^m (t_i - t_{i-1})}_{b-a}$$

— o — o —

Brutalmente

$$\begin{aligned}
 \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| &\sim \|(t_i - t_{i-1}) \dot{\gamma}(t_i)\| \\
 &\sim (t_i - t_{i-1}) \|\dot{\gamma}(t_i)\|
 \end{aligned}$$

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\dot{\gamma}(t)\| dt \sim (t_i - t_{i-1}) \|\dot{\gamma}(t_i)\|$$

La dimostrazione rende formali i " $\sim$ "

— o — o —