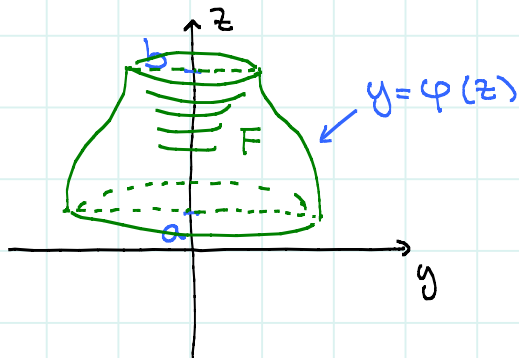
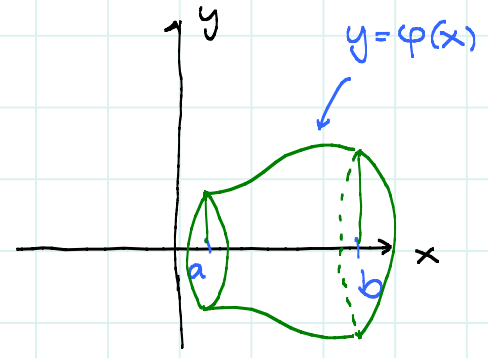


SOLIDI DI ROTAZIONE

Due tipi di setting

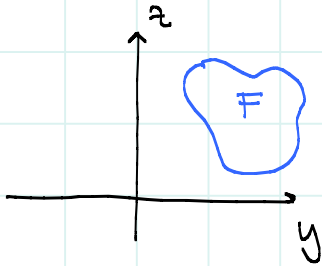


Intorno asse z



Intorno asse x

Possiamo anche ruotare figure più generali



Domande:

- descrivere l'equazione
- calcolare Volume
- calcolare baricentro

Equazione Sia $F = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : a \leq z \leq b, 0 \leq y \leq \varphi(z)\}$
 ↑
 come nella rotazione asse z

Qual è l'eq. del solido?

In coord cilindriche diventa

$$a \leq z \leq b \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad 0 \leq \rho \leq \varphi(z)$$

↑
 rotazione
 "completa"
 ↑
 posso considerare
 anche rotazioni di
 angoli diversi

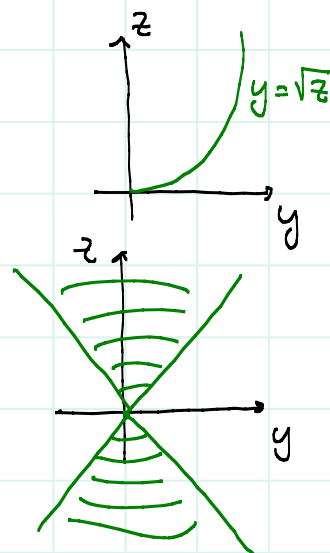
↑ ↑
 è come dire che la sezione
 ad altezza z è un cerchio
 di raggio $R_z = \varphi(z)$

con = è la sda sup. laterale

$$x^2 + y^2 \leq \varphi(z)^2$$

Dice che la sezione è
un cerchio di raggio $\varphi(z)$

$x^2 + y^2 = z^2$ è il solido di rotazione
con. a $\varphi(z) = |z|$
e quindi è un "doppio cono"



Brutalmente : i solidi di rotazione
intorno all'asse z si
riconoscono dalla presenza
di x^2+y^2 nell'equazione
(senza altre x e y in giro)

Nel caso in cui la figura F che ruota è un generico sottoinsieme del piano y, z (diciamo con $y \geq 0$) allora in coord. cilindriche la descrizione è

$$0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (z, \rho) \in F$$

Come si calcola il volume?

Nel caso in cui $S: a \leq z \leq b \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad 0 \leq \rho \leq \varphi(z)$

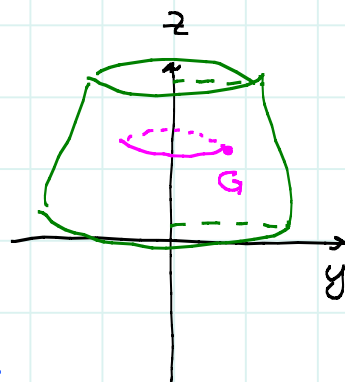
$$\text{Vol}(S) = \int_a^b dz \text{Area}(S_z) = \pi \int_a^b \underbrace{\varphi(z)^2}_{R_z^2} dz$$

TEOREMA (GULDINO 1) (Guldino per i volumi)

$$\text{Vol}(S) = \text{Area}(F) \cdot 2\pi y_G$$

Figura
che ruota

lunghezza della
circonferenza descritta
dal baricentro della figura
durante la rotazione



Dim. Usiamo la formula per il baricentro

$$\begin{aligned} y_G &= \frac{1}{\text{Area}(F)} \iint_F y \, dy \, dz \\ &= \frac{1}{\text{Area}(F)} \int_a^b dz \int_0^{\varphi(z)} dy \, y \\ &= \frac{1}{\text{Area}(F)} \int_a^b dz \, \frac{1}{2} \varphi(z)^2 = \frac{1}{2 \text{Area}(F)} \int_a^b \varphi(z)^2 dz \end{aligned}$$

Quando moltiplico per $2\pi \text{Area}(F)$, ottengo il volume calcolato per sezioni.

— o — o —

Formule analoghe valgono anche se la figura F che ruota NON è un insieme normale

$$\text{Vol}(S) = \iiint_S 1 \, dz \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} d\theta \iint_{(z,p) \in F} p \, dz \, dp$$

$\uparrow$ cilindriche $\uparrow$ pag.

$$= 2\pi \iint_F p \, dz \, dp$$

D'altra parte

$$y_G = \frac{1}{\text{Area}(F)} \iint_F y \, dz \, dy = \frac{1}{\text{Area}(F)} \iint_F p \, dz \, dp$$

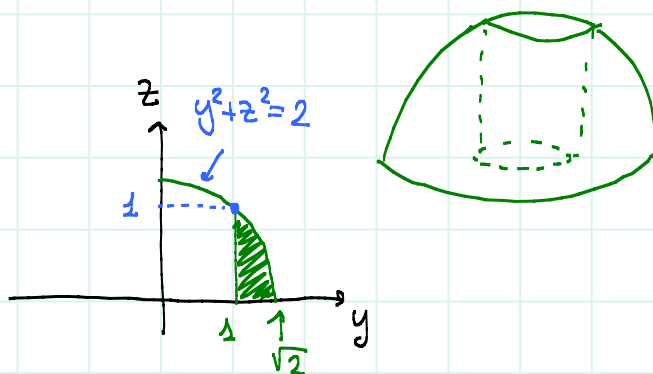
Anche in questo caso moltiplicando per 2π Area(F) si ottiene nuovamente il volume?

Se la rotazione non è completa, se ne tiene conto scrivendo dove varia θ .

Esercizio 1 Volume e coord. del baricentro di

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2 + y^2 + z^2 \leq 2}_{\text{Dentro la sfera}}, \underbrace{x^2 + y^2 \geq 1}_{\substack{\uparrow \\ \text{fuori dal} \\ \text{cilindro}}}, \underbrace{z \geq 0}_{\text{parte alta}}\}$$

"Semisfera con una cavità cilindrica dentro"



$$\text{Vol}(S) = \int_0^1 dz \text{ Area}(S_z)$$

↑
corona circolare con
raggio interno 1 e raggio
esterno $\sqrt{2-z^2}$

$$= \pi \int_0^1 (2 - z^2 - 1) dz = \pi \int_0^1 (1 - z^2) dz = \frac{2}{3} \pi$$

In alternativa, posso usare la formula con le cilindriche

$$\text{Vol}(S) = 2\pi \iint_F \rho \, dz \, d\rho = 2\pi \int_0^1 dz \int_1^{\sqrt{2-z^2}} d\rho \, \rho$$

↑
F è
normale risp.
asse z

$$= \pi \int_0^1 [\rho^2]_{\rho=1}^{\rho=\sqrt{2-z^2}} dz = \text{come prima}$$

Baricentro: $x_G = y_G = 0$ (solite simmetrie)

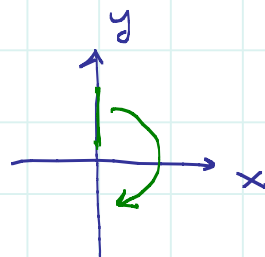
$$\iiint_S z \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 dz \, z \cdot \text{Area}(S_z) = \int_0^1 z (1-z^2) dz = \frac{1}{4}$$

da cui il calcolo di z_G

Se avessi ruotato la figura di 180° in verso orario visto dall'alto, cosa succedeva?

Il volume era metà, z_G restava uguale, la descrizione era

$$0 \leq z \leq 1, \quad 1 \leq \rho \leq \sqrt{2-z^2}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$



In particolare $y_G = 0$

— o — o —