

CALCOLO INTEGRALE IN DUE VARIABILI

INTEGRALE DI RIEMANN

- Notazioni
- Significato geometrico
- Idea definizione
- Tecniche di calcolo

NOTAZIONI

$$\iint_A f(x,y) dx dy$$

integrale doppio
 integrale rispetto alle due variabili
 funzione che si integra
 INTEGRANDA
 zona di integrazione
 $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ $A \subseteq \mathbb{R}^2$

Integrali PROPRI. Due ingredienti fondamentali

- A è un insieme LIMITATO
- f è una funzione LIMITATA, cioè

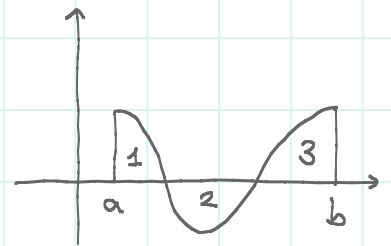
$$\exists M \in \mathbb{R} \text{ t.c. } |f(x,y)| \leq M \quad \forall (x,y) \in A$$

(cioè il grafico sta tra il piano $z = -M$ ed il piano $z = M$)

Integrali IMPROPRI: se manca uno o entrambi gli ingredienti fondamentali

SIGNIFICATO GEOMETRICO

Analisi 1: $\int_a^b f(x) dx = \text{area CON SEGNO della}$
 parte di piano tra
 asse x e grafico di $f(x)$



$$= \text{Area 1} + \text{Area 3} - \text{Area 2}$$

Analisi 2 :

$\iint_A f(x,y) dx dy =$ volume con segno della parte dello spazio $\mathbb{R}^3$ compresa tra il grafico di $f(x,y)$ ed il piano base x,y .

IDEA DELLA DEFINIZIONE (alla DARBOUX)

Per convenzione integriamo funzioni definite su tutto $\mathbb{R}^2$ ma nulle al di fuori di un insieme A limitato.

Ci sono 3 casi :

- caso banale,
- caso semi-banale,
- caso generale.

Caso banale $A = [a,b] \times [c,d]$

= rettangolo con lati // agli assi

$f(x,y) = \lambda$ costante in A (e 0 fuori di A)

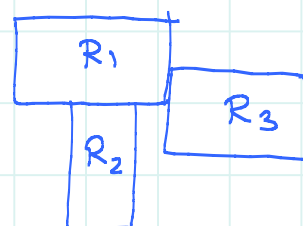
Per definizione $\iint_A f(x,y) dx dy = \lambda \cdot \underbrace{(b-a) \cdot (d-c)}_{\text{area della base}}$
↑
altezza con segno

= volume con segno di un parallelepipedo

Caso semi-banale $A =$ unione finita di rettangoli come sopra senza p.ti interni in comune

$f(x,y)$ è costante in ogni rettangolo, eventualmente con costanti diverse

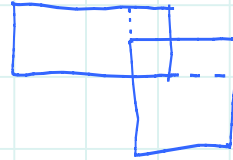
(non sottilizziamo sui bordi comuni)



Geometricamente possiamo pensare il sotto grafico come un "sistema di grattacieli"

Ufficialmente si chiamano STEP FUNCTIONS e sono combinazioni di casi banali

(non ci sono problemi anche se i rettangoli si intersecano, pur di suddividere ulteriormente)



$$\iint_A f(x,y) dx dy = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \text{Area}(R_i)$$

Caso generale Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ limitata e nulla fuori da un insieme A limitato.

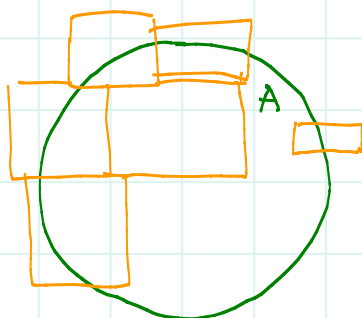
Definiamo

$I^+(f) := \sup \left\{ \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(x,y) dx dy : \varphi \text{ è una step function e } \varphi(x,y) \geq f(x,y) \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

↑
integrale superiore

$$I^-(f) := \sup \left\{ \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(x,y) dx dy : \varphi \text{ è una step function e } \varphi(x,y) \leq f(x,y) \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Oss. geometrica L'insieme di defn. delle step funct. sopra e sotto è in generale diverso dall'insieme A



Oss Le ipotesi dell'integrale proprio garantiscono che esistono step function sopra e sotto!

Prop. Per ogni f con le due proprietà vale che

$$I^-(f) \leq I^+(f)$$

Def. Se per caso accade che $I^-(f) = I^+(f)$, allora si dice che f è integrabile secondo Riemann e il valore comune è proprio

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy = \iint_A f(x,y) dx dy$$

↑
se $f \equiv 0$ fuori di A

Teorema misterioso Se A è decente e f pure, allora tutto ok ☺
il bordo si può ricoprire con rett. di area piccola ↑ ad esempio continua

Esempio cattivo (DIRICHLET di Analisi 2)

Sia $A = [0,1] \times [0,1]$ e sia

$$f(x,y) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ e } y \text{ sono in } \mathbb{Q} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

In questo caso $I^+(f) = 1$ e $I^-(f) = 0$

Ogni step function $\varphi(x,y) \geq f(x,y)$ deve valere 1 in A
" $\varphi(x,y) \leq f(x,y)$ " 0 in A

Proprietà dell'integrale Le stesse di Analisi 1

① È lineare a parità di zona di integrazione

② È "monotono": se $f(x,y) \leq g(x,y)$ in A , allora $\iint_A f(x,y) \leq \iint_A g(x,y) \dots$

③ È additivo rispetto alla zona di integrazione, cioè

$$\iint_{A \cup B} f(x,y) dx dy = \iint_A f(x,y) dx dy + \iint_B f(x,y) dx dy$$

se A e B non hanno p.ti interni in comune.