

Limiti all'infinito in 2 o 3 variabili

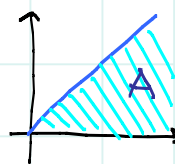
Esempio 1 $f(x, y) = x^4 - y^2$

Su tutto $\mathbb{R}^2$: $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t, 0) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} t^4 = +\infty$

$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(0, t) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} (-t^2) = -\infty$

su $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x\}$

(idea: x va all'infinito per forza,
 y può andare all'infinito, ma meno di x)



$$x^4 - y^2 \geq x^4 - x^2 \quad \text{per ogni } (x, y) \in A$$

$\uparrow$
 $y \leq x$

Se dimostro che

$$\lim_{\substack{x^2+y^2 \rightarrow +\infty \\ (x, y) \in A}} x^4 - x^2 = +\infty$$

ho finito

Domanda $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} x^4 - x^2$ su tutto $\mathbb{R}^2$? Non esiste

$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(0, t) = 0$ mentre $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, 0) = +\infty$

Sull'insieme A vedo 1.5 soluzioni

Coord. polari:

$$\begin{aligned} x^4 - x^2 &= \rho^4 \cos^4 \theta - \rho^2 \cos^2 \theta \geq \rho^4 \cos^4 \theta - \rho^2 \\ &\geq \frac{1}{4} \rho^4 - \rho^2 \rightarrow +\infty \quad \text{per } \rho \rightarrow +\infty \\ &\quad \uparrow \cos \theta \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ in } A \end{aligned}$$

Per il secondo metodo consideriamo sempre in A il limite di x

1° metodo : coord polari $\rho \cos \theta \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \rho$

2° metodo : $x \geq \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + y^2} \quad \forall (x, y) \in A$
e questo tende a $+\infty$ su tutto $\mathbb{R}^2$

$$4x^2 \stackrel{?}{\geq} x^2 + y^2 \leadsto 3x^2 \stackrel{?}{\geq} y^2$$

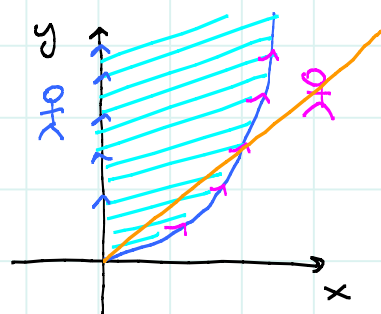
$\uparrow$
vera perché $y \leq x$ in A

Consideriamo ora $B_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq x^\alpha\}$ $\alpha > 0$ reale

Domanda: per quali α esiste il limite per $x^2 + y^2 \rightarrow +\infty$ in questo insieme $f(x, y) = x^4 - y^2$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(0, t) = -\infty \quad (\text{se esiste è } -\infty)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, t^\alpha) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^4 - t^{2\alpha}$$



Se $2\alpha < 4$, cioè $\alpha < 2$, allora il 2° viene $+\infty$, quindi in gen. N.E
" $2\alpha = 4$ $\alpha = 2$ " 0 "

Se $\alpha > 2$ POTREBBE ESISTERE

$$f(x, y) = x^4 - y^2 \leq y^{\frac{4}{\alpha}} - y^2 = \text{espressione del tipo } y^\beta - y^2 \text{ con } \beta < 2$$

Proviamo in coord. polari

$$y^\beta - y^2 = \rho^\beta \underbrace{\sin^\beta \theta}_{\leq 1} - \rho^2 \underbrace{\sin^2 \theta}_{\geq \frac{1}{2}} \leq \rho^\beta - \frac{1}{2} \rho^2 \rightarrow -\infty$$

Servirebbe sapere che $\theta \geq \frac{\pi}{4}$ in B_α . Questo non è vero sempre, ma lo è per ρ grande

Esempio 2 $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} x^6 + y^4 - x^2 y^3$

Se esiste, fa $+\infty$

$$f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \rho^6 \cos^6 \theta + \rho^4 \sin^4 \theta - \rho^5 \cos^2 \theta \sin^3 \theta$$

- Se $\cos \theta \neq 0$ allora vince il termine con ρ^6
- Se $\cos \theta = 0$, allora $\sin^4 \theta = 1$ e c'è solo ρ^4

Questo è fare il limite sulle rette!!

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t^2, t^3) = t^{12} + t^{12} - t^{13} = -\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(2t, t^2) = 64t^6 + t^8 - 4t^8 \rightarrow -\infty \quad \therefore$$

Esempio 2 bis $f(x, y) = x^6 + y^4 - x^2 y^3$ Sul 1° quadrante

Cambio di variabili che "poneggia" gli esponenti

$$x = u^2 \quad y = v^3$$

Nelle nuove variabili diventa $u^{12} + v^{12} - u^4 v^{3\beta}$

Punto chiave: fare il limite della prima per $x^2 + y^2 \rightarrow +\infty$ è equivalente a fare il limite della seconda per $u^2 + v^2 \rightarrow +\infty$

"abbiamo $x^2 + y^2$ grande se e solo se $u^2 + v^2$ è grande"
 In limite in (u, v) si può fare con le coord. polari

$$\begin{aligned} u^{12} + v^{12} - u^4 v^{3\beta} &= \rho^{12} (\underbrace{\cos^{12} \theta + \sin^{12} \theta}_{\geq m > 0 \leftarrow \text{SOLITO DISCORSO}}) - \rho^{4+3\beta} \dots \\ &\geq m \rho^{12} - \rho^{4+3\beta} \end{aligned}$$

Quindi se $4+3\beta < 12$, cioè $\beta < \frac{8}{3}$, allora $\lim = +\infty$

Se $4+3\beta \geq 12$, cioè $\beta \geq \frac{8}{3}$, allora il limite non esiste e lo verifico con l'unico che pareggia gli esponenti

$$f(t^2, t^3) = t^{12} + t^{12} - t^4 \cdot t^{3\beta}$$

Se $\beta > \frac{8}{3}$, allora va a $-\infty$, se $\beta = \frac{8}{3}$, allora diventano importanti e potrebbe essere che fa comunque $+\infty$

Allenamento + semplice

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + cxy$$

Se esiste, il limite è $+\infty$. Provo in coord. polari:

$$\rho^2 + c\rho^2 \cos\theta \sin\theta = \rho^2 (1 + c \cos\theta \sin\theta)$$

Qui dipende da c : $\rightarrow$ se è "piccolo" allora viene $+\infty$
 $\rightarrow$ se è "grande" allora ci sono direzioni in cui viene $-\infty$.

Mettiamo c negativo. Può essere $1 + c \cos\theta \sin\theta < 0$
 $\cos\theta \sin\theta = \frac{1}{2} \sin(2\theta)$ assume valori tra $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$

Quindi $1 + c \cos\theta \sin\theta \geq 1 + \frac{c}{2} > 0$ se $c > -2$

Se $c \leq -2$, allora il coeff. può essere nullo o neg.

Conclusione: il limite esiste e fa $+\infty$ se e solo se $|c| < 2$
— o — o —