

**MATRICE JACOBIANA**  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$   $x_0 \in D$

Si dice che  $f$  è diff. in  $x_0$  se esiste  $J$  matrice  $m \times n$   
 $\uparrow$  JACOBIANA

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Jh + o(\|h\|)$$

$\uparrow \quad \uparrow$   
 $\mathbb{R}^n \quad \mathbb{R}^m$   
 $m \times n$

dove  $o(\|h\|)$  è una funzione  $r: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^m$  t.c.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|r(h)\|}{\|h\|} = 0$$

$\uparrow$  norma in  $\mathbb{R}^m$   
 $\uparrow$  norma in  $\mathbb{R}^n$

Fatto generale Le righe di  $J$  sono i gradienti delle componenti di  $f$ .  
 Nel caso particolare  $m=1$ , la  $J$  è un vettore riga.

**CHAIN RULE** Ad analisi 1 avevamo

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Analisi 2 :  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$   $g: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  allora

$$J(g \circ f)(x) = (Jg)(f(x)) Jf(x)$$

$\begin{matrix} m \\ \boxed{\phantom{00}} \end{matrix} \quad k \quad \begin{matrix} m \\ \boxed{\phantom{00}} \end{matrix} \quad k \quad \begin{matrix} m \\ \boxed{\phantom{00}} \end{matrix} \quad m$

Esempio classico

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \gamma(t) = (\alpha(t), \beta(t))$$

Costruisco

$$\varphi(t) := f(\alpha(t), \beta(t))$$

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\varphi'(t) = f_x(\alpha(t), \beta(t)) \alpha'(t) + f_y(\alpha(t), \beta(t)) \beta'(t)$$

Rigorosamente:  $J\varphi(t) =$

$$\begin{aligned} & \cdot Jf(\gamma(t)) J\gamma(t) \\ & (f_x(\gamma(t)), f_y(\gamma(t))) \begin{pmatrix} \alpha'(t) \\ \beta'(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Consideriamo ora

$$g(u, v) = f(\alpha(u, v), \beta(u, v)) \quad \text{e calcoliamo le deriv. part.}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) &= f_x(\alpha(u, v), \beta(u, v)) \frac{\partial \alpha}{\partial u}(u, v) + \\ &+ f_y(\alpha(u, v), \beta(u, v)) \frac{\partial \beta}{\partial u}(u, v) \end{aligned}$$

$$g_u = f_x \alpha_u + f_y \beta_u$$

$$g_v = f_x \alpha_v + f_y \beta_v$$

Rigorosamente:

$$\begin{array}{ccc} (g_u & g_v) &= (f_x \quad f_y) \begin{pmatrix} \alpha_u & \alpha_v \\ \beta_u & \beta_v \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \nabla \alpha \\ \leftarrow \nabla \beta \end{matrix} \\ \uparrow & & \uparrow \\ J(f \circ \gamma) & & Jf \end{array}$$

Esempio Norma del gradiente in coord. polari

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad f(x, y)$$

Considero

$$g(\rho, \theta) = f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$$

$$\text{Calcolo } \|\nabla f(x, y)\|^2 = f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2$$

Che cosa diventa in coord. polari?

$$f_x(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)^2 + f_y(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)^2 \quad \ddot{\smile}$$

Quale operazione su  $g$  produce lo stesso effetto?

$$g_\rho = f_x \cos \theta + f_y \sin \theta$$

$$g_\theta = f_x(-\rho \sin \theta) + f_y \rho \cos \theta$$

$$f_x(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \cdot \cos \theta + \dots$$

↑  
derivata di  $\rho \cos \theta$   
rispetto a  $\rho$

Moltiplico la prima per  $\rho$  e faccio i  $\square$ , oppure divido la seconda per  $\rho$  e faccio i  $\square$

$$g_\rho^2 = f_x^2 \cos^2 \theta + f_y^2 \sin^2 \theta + 2 f_x f_y \cos \theta \sin \theta$$

$$\frac{1}{\rho^2} g_\theta^2 = f_x^2 \sin^2 \theta + f_y^2 \cos^2 \theta - 2 f_x f_y \cos \theta \sin \theta$$

$$g_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} g_\theta^2 = f_x^2 + f_y^2$$

Esercizio Calcolare il Laplaciano in coord. polari

$$\Delta f(x, y) = f_{xx}(x, y) + f_{yy}(x, y)$$

## DERIVATE PARZIALI SUCCESSIVE

$$f(x, y) = x^2 y + \cos(xy)$$

$$f_x = 2xy - y \sin(xy)$$

$$f_y = x^2 - x \sin(xy)$$

$$f_{xx} = 2y - y^2 \cos(xy)$$

$$f_{yy} = -x^2 \cos(xy)$$

$$f_{xy} = (f_x)_y =$$

$$f_{yx} = (f_y)_x =$$

$$= 2x - \sin(xy) - yx \cos(xy)$$

$$= 2x - \sin(xy) - xy \cos(xy)$$

Oss. Le due derivate parziali miste sono uguali !!

**Teorema** Sotto ipotesi decenti le derivate miste non dipendono dall'ordine di esecuzione.  
(esempio di ipotesi: se sono tutte continue)

Oss. Le derivate  $k$ -esime di una funzione di 2 variabili a priori sono  $2^k$ , ma di queste solo  $k+1$  sono essenzialmente distinte (conta quante volte derivo rispetto ad ogni variabile).

### Costruttore di controesempi

Sia  $g(x, y)$  tale che  $\lim_{t \rightarrow 0} g(t, 0) = \alpha$   $\lim_{t \rightarrow 0} g(0, t) = \beta$

Allora  $f(x, y) = xy g(x, y)$  ha  $f_{xy}$  e  $f_{yx}$  uguali ad  $\alpha$  e  $\beta$  in qualche ordine.

— o — o —