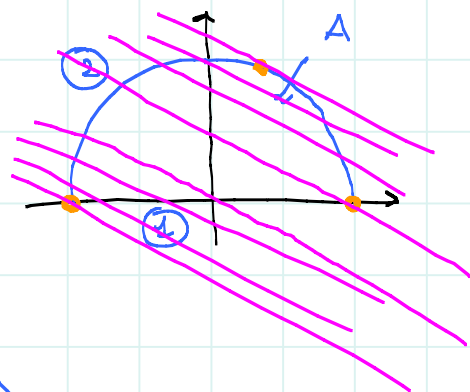


Esempio 1 $f(x, y) = x + 2y$

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$$



Weierstrass no pbm

Sing e staz. interni: $\emptyset$

Bordo $\rightarrow$ pezzo rettilineo (parametrizz.)

$\rightarrow$ pezzo curvilineo (moltiplicatori)

① $(t, 0)$ con $t \in [-1, 1]$ $\varphi_1(t) := f(t, 0) = t$

Max/min per $t = \pm 1 \rightsquigarrow$ candidati $(-1, 0), (1, 0)$

② Equazione $x^2 + y^2 - 1 = 0$ che però sarebbe tutta la circ.

In questo caso posso comunque fare i moltiplicatori, MA

$\rightarrow$ devo escludere i candidati con $y < 0$

$\rightarrow$ devo includere d'ufficio i "bordi dei bordi" o

"p.ti di taglio". In questo caso i due estremi che abbiamo già considerato.

Facciamo il conto, come alla lez. precedente troviamo

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

$\downarrow$
NO BUONO

Facciamo il conto

$$f(-1, 0) = -1 \quad \leftarrow \text{min}$$

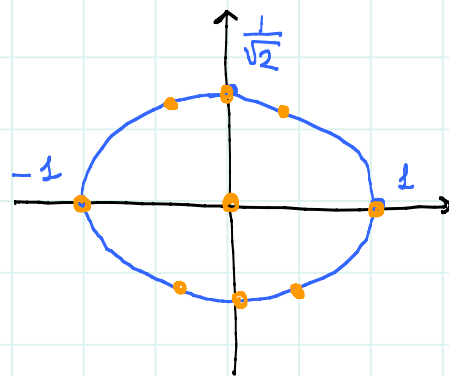
$$f(1, 0) = 1$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \sqrt{5} \quad \leftarrow \text{max}$$

Esempio 2

$$f(x, y) = x^4 + y^4$$

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 \leq 1\}$$



Weierstrass OK

Sing. interni : $\emptyset$

Staz. interni : $\nabla f = 0 \quad \begin{cases} 4x^3 = 0 \\ 4y^3 = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \boxed{(0,0)}$

Bordo che ha equ $\underbrace{x^2 + 2y^2 - 1 = 0}_{g(x,y)}$

1° sistema $\begin{cases} 2x = 0 \\ 4y = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases} \quad \text{NO SOLUZIONI}$

2° sistema $\begin{cases} 4x^3 = 2\lambda x \\ 4y^3 = 4\lambda y \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x^3 = \lambda x \\ y^3 = \lambda y \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$

RESISTERE ALLA TENTAZIONE DI DIVIDERE O SEMPLIFICARE x e y nella 1° e 2°

$\rightarrow$ se $x=0$, allora dalla terza $y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \rightsquigarrow \boxed{(0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}})}$

$\rightarrow$ se $y=0$, allora " " $x = \pm 1 \rightsquigarrow \boxed{(\pm 1, 0)}$

$\rightarrow$ se $x \neq 0$ e $y \neq 0$, allora divido e ottengo $\begin{matrix} 2x^2 = \lambda \\ y^2 = \lambda \end{matrix}$

quindi $y^2 = 2x^2$, e nella 3° equ.

$$5x^2 = 1 \rightsquigarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \quad y = \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

$\rightsquigarrow$ candidati $\boxed{(\pm \frac{1}{\sqrt{5}}, \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}})}$ $\leftarrow 4 \text{ p.ti}$

Sostituisco tutto :

$$f(0,0) = 0 \quad \leftarrow \text{min}$$

$$f(\pm 1, 0) = 1 \quad \leftarrow \text{max}$$

$$f(0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{4}$$

$$f(\pm \frac{1}{\sqrt{5}}, \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}) = \frac{1}{25} + \frac{4}{25} = \frac{1}{5}$$

Oss. Potrei parametrizzare l'ellisse come

$$x^2 + 2y^2 = 1$$

$$x^2 + (\sqrt{2}y)^2 = 1$$

$$x = \cos \theta \quad \sqrt{2}y = \sin \theta$$

La param. è

$$(\cos \theta, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta) \quad \text{con } \theta \in [0, 2\pi]$$

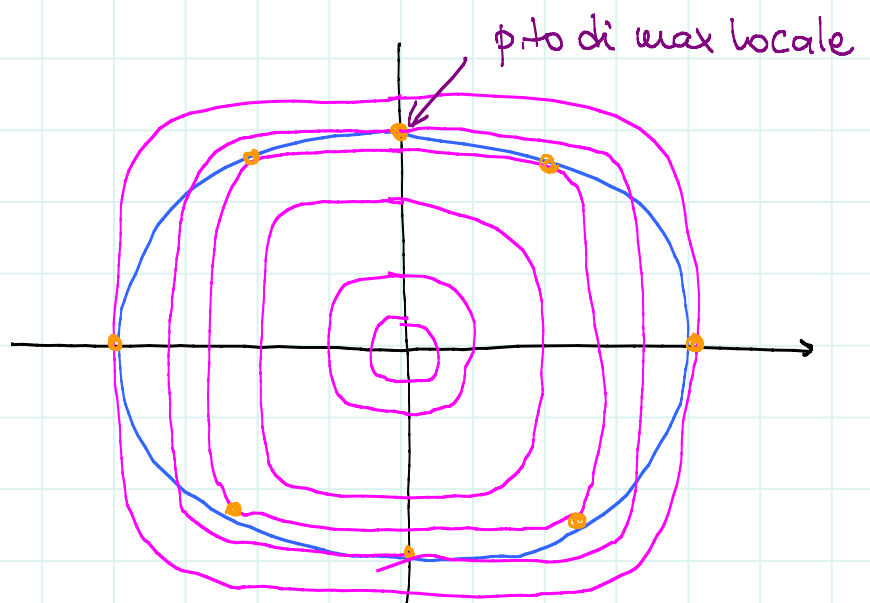
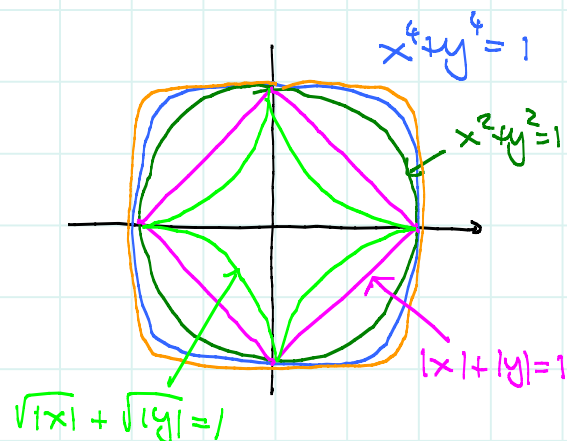
Interpretazione con le linee di livello

Come sono le curve $x^4 + y^4 = \lambda$

Per $\lambda > 0$ sono "vecchi televisori"

Idea 1: se $x^2 + y^2 = 1$, allora $x^4 + y^4 \leq 1$

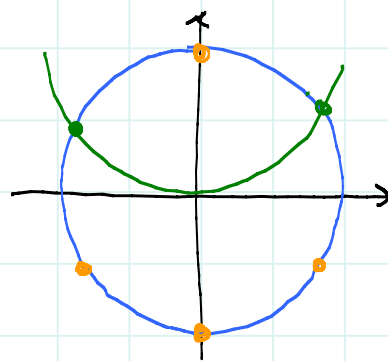
Idea 2: studio $y = \pm \sqrt[4]{1-x^4}$



Esempio 3

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

$$f(x, y) = |y - x^2|$$



Weierstrass OK e inoltre è SOLO BORDO

Idea: studiare $\underbrace{y - x^2}_{f_1(x, y)}$ e poi trarne le conclusioni

.... secondo sistema

$$\begin{cases} -2x = 2\lambda x \\ 1 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\nabla f_1 = \lambda \nabla g$$

→ Se $x = 0$, allora $y = \pm 1 \rightsquigarrow (0, \pm 1)$

→ Se $x \neq 0$, allora dalla prima $\lambda = -1$ e dalla 2^a $y = -\frac{1}{2}$
e quindi dalla 3^a $x^2 = \frac{3}{4} \quad x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $\rightsquigarrow \left(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

Sostituzione:

$$f_1(0, +1) = 1$$

← Max f_1

$$f_1(0, -1) = -1$$

$$f_1\left(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{3}{4} = -\frac{5}{4} \quad \leftarrow \text{min } f_1$$

Da questo deduco che $\text{Max } f = \frac{5}{4}$ e $\text{min } f = 0$

vecchio min
con segno cambiato

con p.ti di min
le soluz. di

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = x^2 \end{cases}$$

Interpretare con linee di livello ...

— o — o —