

Esempi

$$f(x, y) = x + 7y$$

$$f_x = 1$$

$$f_y = 7$$

$$f(x, y) = x^2 y^3$$

$$f_x = 2xy^3$$

$$f_y = 3x^2 y^2$$

$$f(x, y) = \sin(xy^2)$$

$$f_x = y^2 \cos(xy^2)$$

$$f_y = 2xy \cos(xy^2)$$

$$f(x, y) = y \sin(xy)$$

$$f_x = y^2 \cos(xy)$$

$$f_y = \sin(xy) + xy \cos(xy)$$

$$f(x, y) = \frac{x}{y^2}$$

$$f_x = \frac{1}{y^2}$$

$$f_y = -\frac{2x}{y^3}$$

$$f(x, y) = x^y$$

$$f_x = y x^{y-1}$$

$$f_y = x^y \log x$$

$$a^y = e^{y \log a}$$

Esempio 2

$$f(x, y) = x^2 + xy^3$$

$$(x_0, y_0) = (1, 2)$$

$$v = (1, -3)$$

Calcolare

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1, 2)$$

Uso che

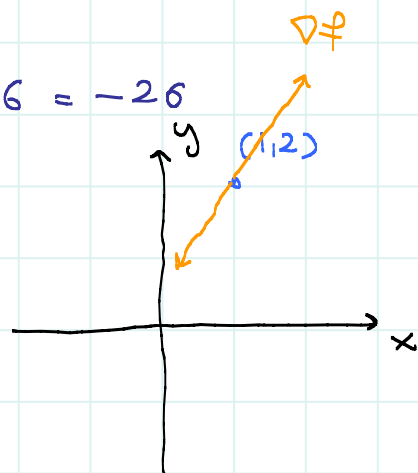
$$\frac{\partial f}{\partial v} = \langle \nabla f, v \rangle$$

$$\nabla f(x, y) = (2x + y^3, 3xy^2)$$

$$\nabla f(1, 2) = (10, 12)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1, 2) = \langle (10, 12), (1, -3) \rangle = 10 - 36 = -26$$

Se metto una pallina nel p.to del grafico che corrisponde a (1, 2), dove va?



Formula per le derivate direzionali

Ipotesi: f è diff. in x_0 , cioè

$$f(x_0 + R) = f(x_0) + \langle \alpha, R \rangle + o(\|R\|)$$

Tesi $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \langle \alpha, v \rangle$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \overbrace{tv}^R) - f(x_0)}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0) + \langle \alpha, tv \rangle + o(|t|\|v\|) - f(x_0)}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cancel{f(x_0)} + \langle \alpha, tv \rangle + o(|t|\|v\|) - \cancel{f(x_0)}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cancel{t} \langle \alpha, v \rangle}{\cancel{t}} + \lim_{t \rightarrow 0} \boxed{\frac{o(|t|\|v\|)}{t\|v\|}} \cdot \|v\|$$

$$= \langle \alpha, v \rangle$$

↓
0 per definizione
di o piccolo

— 0 — 0 —

Domanda: come dimostro che f è diff. in x_0 ??

Teorema del diff. totale Sia $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$

Supponiamo che

(i) tutte le derivate parziali esistono in una certa $B(x_0, r)$

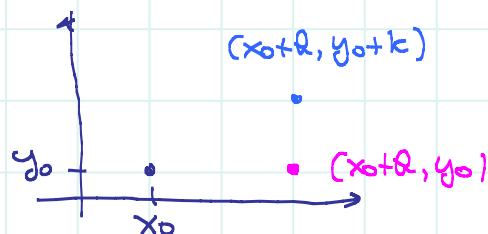
(ii) " " " " sono continue in x_0

Allora f è diff. in x_0 .

Dim in 2 variabili $f(x, y)$ (x_0, y_0)

Devo dimostrare che

$$f(x_0 + R, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)R + f_y(x_0, y_0)k + o(\sqrt{R^2 + k^2})$$



$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) + f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)$$

$$\text{Lagrange rispetto a } y \rightarrow = k f_y(x_0+h, y_0+c) + h f_x(x_0+d, y_0)$$

$$= \boxed{k f_y(x_0, y_0)} + k (f_y(x_0+h, y_0+c) - f_y(x_0, y_0)) + h f_x(x_0, y_0) + h (f_x(x_0+d, y_0) - f_x(x_0, y_0))$$

sono i termini che volevamo

Quello che ci serve è che i due termini restanti siano $o(\sqrt{h^2+k^2})$, cioè (fatto per il primo)

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{k (f_y(x_0+h, y_0+c) - f_y(x_0, y_0))}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

Lo facciamo con il valore assoluto

$$0 \leq \frac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}} |f_y(x_0+h, y_0+c) - f_y(x_0, y_0)| \leq \boxed{|f_y(\dots) - f_y(\dots)|}$$

$\uparrow$ compreso tra 0 e k
 $\downarrow$ 0

Basta osservare che, quando $(h,k) \rightarrow (0,0)$, il p.to (x_0+h, y_0+c) tende a (x_0, y_0) e usare la continuità di f_y .

— o — o —

Lagrange direzionale Cosa resta ad Analisi del Teorema di Rolle - Cauchy - Lagrange?

Sia $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e siano $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Allora
 da qualche parte sul segmento di estremi x_0 e y_0

$$f(y_0) - f(x_0) = \langle y_0 - x_0, \nabla f(c) \rangle$$

Dim Considero

x_0

y_0

$$\varphi(t) := f(x_0 + t(y_0 - x_0))$$

$$f(y_0) - f(x_0) = \varphi(1) - \varphi(0)$$

$$= \varphi'(c)$$

con $c \in (0,1)$

Analisi 1

Def. di
deriv. direzionale

$$= \frac{\partial f}{\partial v}(x_0 + c(y_0 - x_0))$$

↑
direzione $y_0 - x_0$

$$= \langle \underbrace{y_0 - x_0}_v, \nabla f(\underbrace{x_0 + c(y_0 - x_0)}_{\text{p.to del segmento}}) \rangle$$

— o — o —