

Analisi 1 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $x_0 \in \mathbb{R}$

Def 1 Si dice f è derivabile in x_0 se esiste

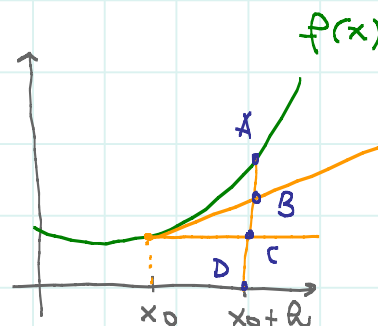
$$f'(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Def 2 Si dice che f è differenziabile in x_0 se esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ t.c.

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \alpha h + o(h) \quad \text{per } h \rightarrow 0$$

Solito disegno:

$$\begin{array}{c} AD = AB + BC + CD \\ \uparrow \quad \quad \uparrow \quad \quad \uparrow \\ f(x_0+h) \quad f'(x_0)h \quad f(x_0) \\ \uparrow \\ o(h) \end{array}$$



Teorema f è derivabile in $x_0 \Leftrightarrow f$ è differenziabile in x_0

Inoltre $\alpha = f'(x_0)$.

— o — o —

Def. (Derivate parziali) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$\uparrow$
se esiste, si dice deriv. part. di f risp. a x in (x_0, y_0)

Analogamente

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Più in generale $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ $x_0 \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) := \lim_{\substack{\Delta \rightarrow 0 \\ \text{Numeri}}} \frac{f(x_0 + \Delta e_k) - f(x_0)}{\Delta}$$

$\swarrow$ k -esimo vettore base canonica di $\mathbb{R}^n$

Notazioni: $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) = f_{x_k}(x_0) = D_{x_k}(x_0)$ sono sinonimi.

Def. (Derivata direzionale) $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

Allora

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) := \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta v) - f(x_0)}{\Delta}$$

si dice derivata in x_0 nella direzione v .

Oss. La def. talvolta si trova ristretta ai vettori ($\|v\| = 1$)

Oss. Le derivate parziali sono speciali derivate direzionali ($v = e_k$)

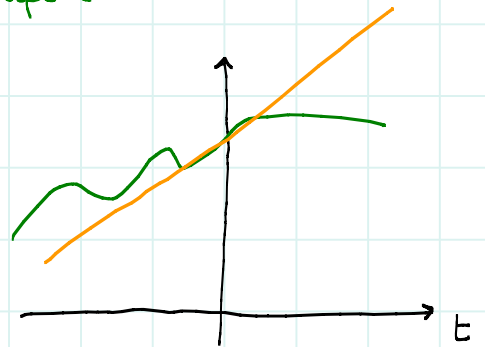
Interpretazione geometrica. Consideriamo l'unico che percorre la retta $t \rightarrow x_0 + tv$

Consideriamo

$$\varphi(t) := f(x_0 + tv) \quad t \in \mathbb{R}$$

= "quota a cui si trova l'unico che percorre la retta al tempo t "

Allora $\varphi'(0) = \frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ proprio per definizione.



Def. Si dice GRADIENTE di f in x_0 il vettore

$$\nabla f(x_0) = (f_{x_1}(x_0), f_{x_2}(x_0), \dots, f_{x_n}(x_0))$$

$\uparrow$
NABLA

Def. (Differenziale). $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ $x_0 \in \mathbb{R}^n$

Si dice che f è differenziabile in x_0 se esiste $\alpha \in \mathbb{R}^n$ t.c.

$$f(x_0 + R) = f(x_0) + \langle \alpha, R \rangle + o(\|R\|)$$

$\uparrow$ vettori $\uparrow$ prod. scalare

dove $o(\|R\|)$ è una funzione $r(R)$ tale che

$\uparrow$ resto

$$\lim_{R \rightarrow 0} \frac{r(R)}{\|R\|} = 0$$

$\uparrow$ limite in n variabili

Riscrittura in 2 variabili

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

Si dice che f è diff. in (x_0, y_0) se esiste $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ t.c.

$$f(x_0 + R, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \alpha R + \beta k + o(\sqrt{R^2 + k^2})$$

Teorema Supponiamo che f sia diff. in x_0 .

Allora valgono i seguenti fatti

(i) f è continua in x_0

(ii) esistono tutte le deriv. parziali in x_0 e $\alpha = \nabla f(x_0)$

(iii) ~ " " direzionali in x_0 e sono date dalla formula

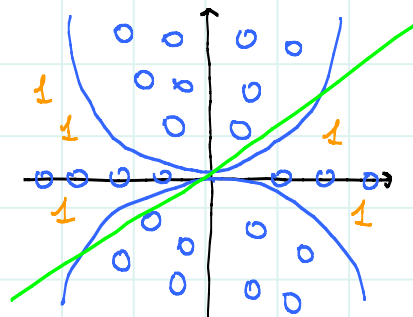
$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \langle \nabla f(x_0), v \rangle$$

Cattive notizie Può succedere che esistano tutte le derivate direzionali in x_0 , ma f NON è nemmeno continua in x_0 .

Basta l'esempio con

le due parabole della

lesione precedente (tutte le derivate direzionali in $(0,0)$ sono nulle)



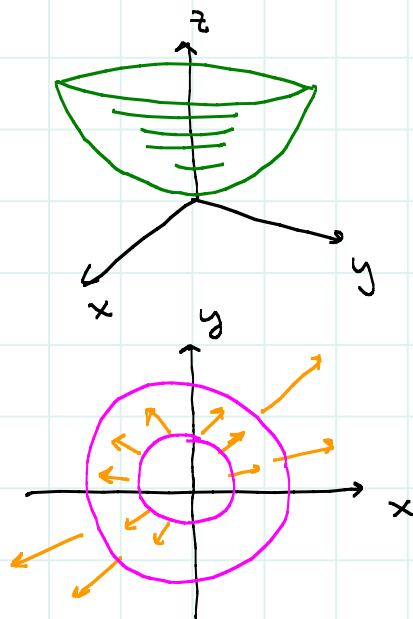
Significato geometrico del gradiente

$\nabla f(x_0)$ indica la direzione nella quale andare se vogliamo "salire in fretta" lungo il grafico.

Esempio $f(x, y) = x^2 + y^2$

$$\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$$

Il gradiente è in ogni punto ortogonale alle linee di livello e punta in direzione "↑ sale"



— o — o —