

LIMITI PER FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

Oss. Posso sempre supporre il limite in $(0,0)$, altrimenti si fa un cambio variabili

Come dim. che un limite esiste?

- 1: provo a fare stime riducendomi a funzioni continue
- 2: passo in coord. polari e cerco stime indep. di θ

$$g_1(\rho) \leq f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \leq g_2(\rho)$$

e spero che $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} g_1(\rho) = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} g_2(\rho) = l$ (stesso l)

- 3: uso l'equivalenza con le successioni. Vale il seguente fatto

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in \mathbb{R}^n \text{ vettori}}} f(x) = l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$$

$x \in \mathbb{R}^n$ vettori

se e solo se

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} f(x_m) = l \quad \text{per ogni successione } \underbrace{x_m \rightarrow 0}_{\substack{\uparrow \\ \text{cioè } \|x_m\| \rightarrow 0}}$$

Come dimostro che un limite NON esiste?

- ① Basta trovare due successioni $x_m \rightarrow 0$ e $y_m \rightarrow 0$ t.c.

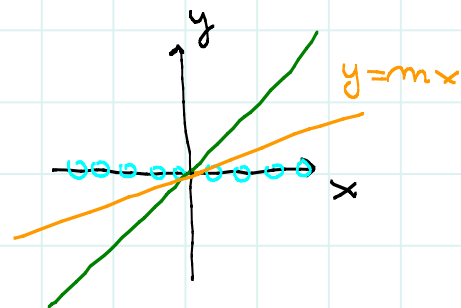
$$f(x_m) \rightarrow l_1 \quad f(y_m) \rightarrow l_2 \quad \text{con } l_2 \neq l_1$$

- ① bis Basta trovare due punti che tendono a 0 per i quali il limite della funzione è diverso.

Esempio 1

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

$\left[\frac{0}{0} \right]$



$$f(t, 0) \quad \lim_{t \rightarrow 0} f(t, 0) = 0$$

$$f(0, t) \quad \lim_{t \rightarrow 0} f(0, t) = 0$$

$$f(t, t) \quad \lim_{t \rightarrow 0} f(t, t) = \frac{1}{2}$$

Per curiosità proviamo $f(t, mt) \rightsquigarrow \lim_{t \rightarrow 0} f(t, mt) = \frac{m}{m^2+1}$

Ma ne sarei accorto in coord. polari?

$$\text{SI: } f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \frac{\rho^2 \cos \theta \sin \theta}{\rho^2} = \cos \theta \sin \theta$$

Quindi il lim per $\rho \rightarrow 0^+$ dipende da θ !!

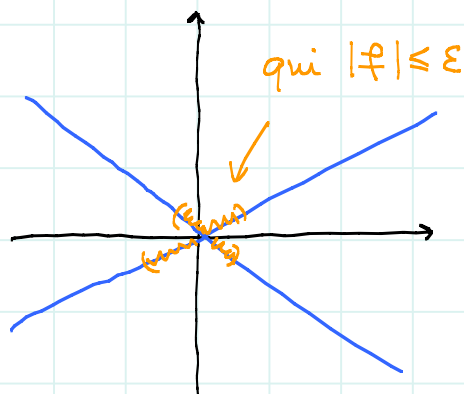
Esempio 2 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$

Provo con l'arrivo sulla retta $y = mx$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, mt) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{m^2 t^3}{t^2 + m^4 t^4} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{m^2 t}{1 + m^4 t^2} = 0$$

qualunque sia m ! Ma il fatto che il lim sia 0 su tutte le rette NON BASTA

Fisso $\varepsilon > 0$. Il fatto che su ogni retta ci sia un intervallo in cui $|f| < \varepsilon$ NON implica che c'è un cerchio in cui $|f| < \varepsilon$



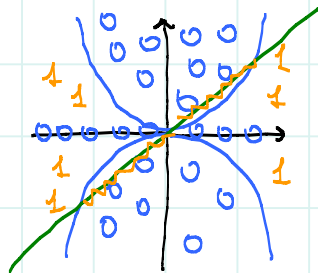
Esempio biunivocativo

Prendiamo f che vale

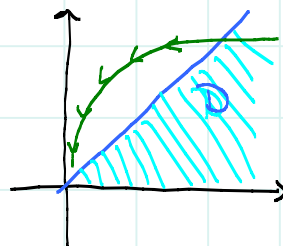
→ 0 dentro le parabole e sull'asse x

→ 1 altrove

In questo caso il limite è 0 se tutte le retti, una di suo non esiste



Esempio 3 $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in D}} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$



Ora è vietato usare curve del tipo (t^2, t) perché non stanno in D vicino a $(0,0)$

Ora il limite esiste e fa 0!!

1° modo Osservo che in D vale che

$$0 \leq \frac{xy^2}{x^2 + y^4} \leq \frac{x \cdot \overbrace{x^2}^{\leq 1}}{x^2 + y^4} \leq x \quad \text{e concludo al solito modo}$$

↑
uso che
 $y \leq x$ in D

2° modo In coord. polari

$$0 \leq \frac{\rho^3 \cos \theta \sin^2 \theta}{\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^4 \sin^4 \theta} = \frac{\rho \cos \theta \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + \rho^2 \sin^4 \theta} \leq \frac{\rho}{\cos^2 \theta} \leq \frac{\rho}{\frac{1}{2}} = 2\rho$$

↑
Num + grande
Den + piccolo

↑
 $\cos \theta \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$
in D

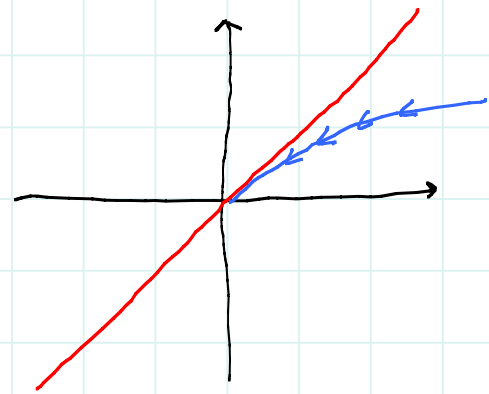
Esempio 4 $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in D}} \frac{x^{30} y^2}{x - y}$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\}$$

Se uso i soliti omini sulle rette:

$$f(t, ut) = \frac{u^2 t^{32}}{(1-u)t} \rightarrow 0$$

$\uparrow$
 $u \neq 1$
perché siamo
in D



Quindi: SE il lim esiste, per forza è 0.

$$f(t+t^{80}, t)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(t+t^{80})^{30} \cdot t^2}{t^{80}} = +\infty \quad \text{perché è come fosse } \frac{t^{32}}{t^{80}}$$

— 0 — 0 —