

① $A = [0, +\infty) \times [0, 1]$ $f(x, y) = \frac{xy}{1+x^2+y^2}$ $\inf/\sup/\max/\min$

② $\gamma(t) = (t+t^2, t-t^2)$ $t \in [0, 2]$

D = dominio racchiuso da sostegno γ + retta per $(0,0)$ e $(6,-2)$

$$\iint_D y \, dx \, dy$$

③ $E = (x, xy, -xz)$

$$\Omega = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z - y^2 = 1, x^2 + y^2 \leq 1 \}$$

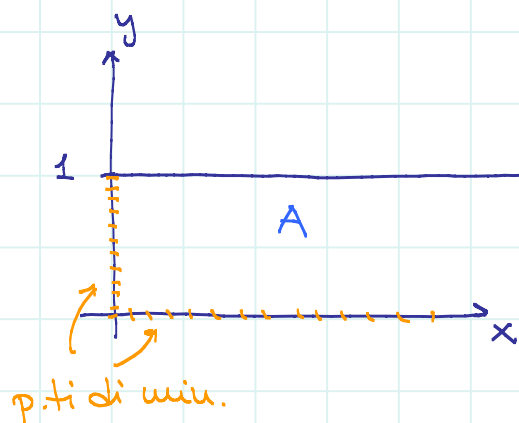
Orientazione uscente

① $\min = \inf = 0$ perché $f(x, y) \geq 0$ sempre in A e $f(0,0) = 0$.

P.t. di min: $xy = 0 \leadsto$ assi

$$0 \leq f(x, y) = \frac{xy}{1+x^2+y^2} \stackrel{y \leq 1}{\leq} \boxed{\frac{x}{1+x^2+y^2}}$$

$\downarrow$ su $\mathbb{R}^2$ e quindi a maggior ragione in A



Quindi $\lim_{\substack{x^2+y^2 \rightarrow +\infty \\ (x,y) \in A}} f(x, y) = 0$

Inoltre esiste $(x_0, y_0) \in A$ t.c. $f(x_0, y_0) > 0$, quindi per w. generalizzato Max esiste.

Dove trovo i candidati p.t. max?

$\rightarrow$ sulla retta $y=1 \leadsto$ studio $\frac{x}{2+x^2}$

$\rightarrow$ p.t. staz. interni $\leadsto$ studio $\nabla f(x, y) = (0, 0)$.

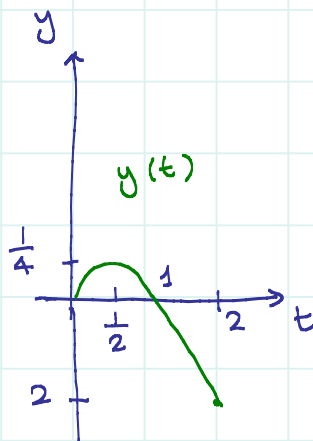
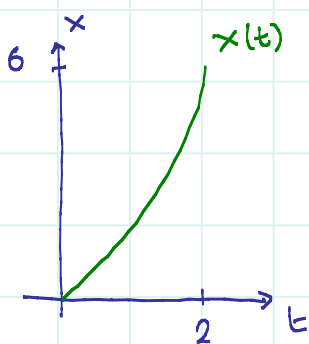
② $\gamma(t) = (t+t^2, t-t^2) \quad t \in [0, 2]$

D = dominio racchiuso da sostegno γ + retta per $(0,0)$ e $(6,-2)$

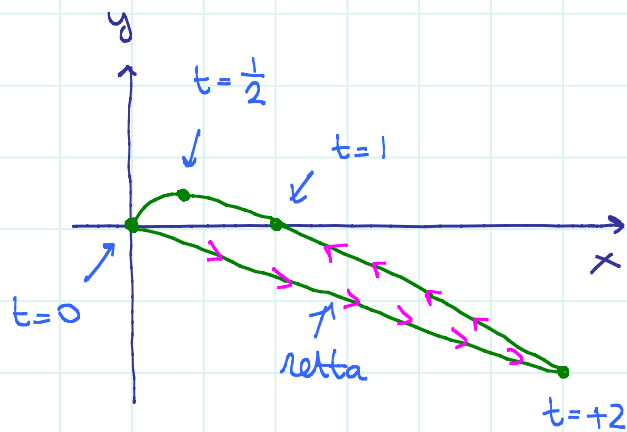
$$\iint_D y \, dx \, dy$$

②.1 La curva è semplice? Sì, perché $x(t) = t+t^2$ è strett. cresc. per $t \geq 0$

②.2 Disegno appross della curva.



- $t \in [0, \frac{1}{2}]$ $x(t) \nearrow$ e $y(t) \nearrow$
- $t \in [\frac{1}{2}, 2]$ $x(t) \nearrow$ e $y(t) \searrow$



[Non serve, ma volendo potrei scrivere

la curva come $y = f(x)$

$$\begin{cases} t-t^2 = y \\ t+t^2 = x \end{cases} \quad t^2+t-x=0 \quad t = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4x}}{2} \quad \text{✓ scelgo quella con segno perché } t \geq 0$$

$$y = \frac{-1 + \sqrt{1+4x}}{2} - \left(\frac{-1 + \sqrt{1+4x}}{2} \right)^2 = \dots \quad]$$

②.3 Dimostro che il sostegno della curva sta sopra la retta $y = -\frac{1}{3}x$ quindi $y(t) \geq -\frac{1}{3}x(t)$

$$t-t^2 \geq -\frac{1}{3}(t+t^2) \Leftrightarrow 3t-3t^2 \geq -t-t^2 \Leftrightarrow 2t^2-4t \leq 0$$

$$\Leftrightarrow t^2-2t \leq 0 \Leftrightarrow t(t-2) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \text{valori intermedi } t \in [0, 2]$$

(2.4) Per calcolare $\iint_D y \, dx \, dy$ uso teo. di v. con $E = (xy, 0)$
oppure $(0, \frac{1}{2}y^2)$

$$\begin{aligned}\iint_D y \, dx \, dy &= \iint_D \operatorname{div} E \, dx \, dy = \int_{\partial D} A \, dy - B \, dx \\ &= \int_{\partial D} xy \, dy\end{aligned}$$

Dove ∂D è fatto da due curve

- $\gamma_1(t) = (t, -\frac{1}{3}t)$ con $t \in [0, 6]$ (segmento)
- $\gamma_2(t) =$ curva data percorsa al contrario

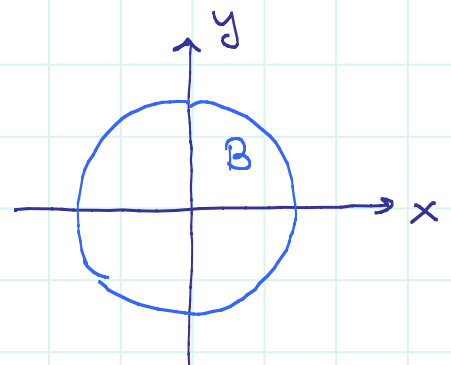
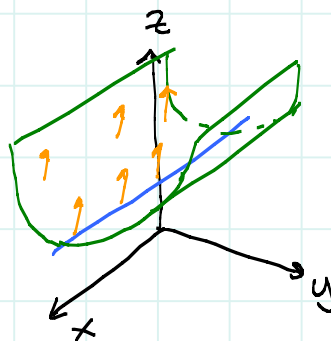
$$= \int_0^6 \underset{x}{t} \underset{y}{(-\frac{1}{3}t)} \underset{dy}{(-\frac{1}{3})} dt - \int_0^2 \underset{x}{(t+t^2)} \underset{y}{(t-t^2)} \underset{\dot{y}(t)}{(1-2t)} dt$$

Oss. È importante porsi il problema 2.3.

Eserc. 3 $E = (x, xy, -xz)$
 $S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z - y^2 = 1, x^2 + y^2 \leq 1 \}$
 Orientazione uscente $\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma$

$$\operatorname{div} E = 1 + x - x = 1 \rightsquigarrow \text{o definizione o teo. divergenza}$$

Questa è una sup. cartesiana $z = 1 + y^2$ con base
il cerchio $x^2 + y^2 \leq 1$



Sembra complicato descrivere il bordo laterale di

$$V = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1 + y^2 \}$$

Uso la definizione parametrizzando la superficie

$$(p \cos \theta, p \sin \theta, \underbrace{1 + p^2 \sin^2 \theta}_{z = 1 + y^2}) \quad p \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi]$$

$\uparrow \quad \quad \uparrow$
param. della
base

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 2p \sin^2 \theta \\ -p \sin \theta & p \cos \theta & 2p^2 \cos \theta \sin \theta \end{pmatrix}$$

$$(M_1, M_2, M_3) = (0, -2p^2 \cos^2 \theta \sin \theta - 2p^2 \sin^3 \theta, p)$$

$-2p^2 \sin \theta$

A questo punto si calcola

$\uparrow$
 $\leadsto$ orientazione giusta

$$\int_0^1 dp \int_0^{2\pi} d\theta \{ p^2 \cos \theta \sin \theta (-2p^2 \sin \theta) - p \cos \theta (1 + p^2 \sin^2 \theta) \cdot p \}$$

- si fa.

— 0 — 0 —