

VF1 Esiste $\max\{x \cos(x+y) : x \geq 0\} \rightarrow \sup = +\infty, \max \text{ N.E.}$

VF2 La forma quadratica $4x^2 + 2y^2 - 8xy$ è definita positiva $\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \det = 8 - 16 < 0 \rightarrow -$

VF3 La funzione $f(x, y) = e^{xy}$ è una primitiva della forma $ye^{xy}dx + xe^{xy}dy \quad \checkmark$

VF4 L'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{|x| + y^2} \leq 4, |z| \leq 1\}$ è un solido di rotazione N

VF5 La curva $(\cos^2 t, \sin^4 t)$ con $0 \leq t \leq \pi$ è semplice $\gamma(\frac{\pi}{2} + t) = \gamma(\frac{\pi}{2} - t) \quad N$

VF6 $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tale che $(1, \lambda, 1)$ ha norma 4 $1 + \lambda^2 + 1 = 16 \quad \delta!$

VF7 La retta tangente alla curva $\gamma(t) = (t^2, t - t^2)$ nel punto $t = 0$ è la retta $y = 1$

VF8 $x^2 + y^4 = o((x^2 + y^2)^{1/2})$ per $(x, y) \rightarrow (0, 0) \quad \checkmark$

$$x^2 = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$$

$\downarrow$
0

$\dot{\gamma} = (2t, 1 - 2t)$

$\gamma(0) + t \dot{\gamma}(0)$
 $(0, 0) \quad (0, 1)$

$x = 0$

MC1 Sia $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ allora $\int_B 7x \, dx \, dy = \dots$

- (A) $\frac{7}{3}$ (B) $\frac{7\pi}{3}$ (C) 0 (D) $\frac{7\pi}{2}$ (E) $\frac{7}{2}$

$7 \int_0^1 dr \int_0^{\pi/2} d\theta \, r^2 \cos \theta$

$7 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3}$

MC2 Sia $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$. Stabilire QUANTI dei seguenti integrali sono nulli.

$\int_B x \, dx \, dy, \quad \int_B y \, dx \, dy, \quad \int_B \sin x \, dx \, dy, \quad \int_B \sin y \, dx \, dy$

$ok \quad > 0 \quad ok \quad > 0$

- (A) 3 (B) 2 (C) 4 (D) 1 (E) 0



MC4 Sia $f(x, y, z) = 6xy + y^4 + e^z$. Allora $\nabla f(1, 1, 0) =$

- (A) 10 (B) (6, 10, 1) (C) (6, 4, 0) (D) (6, 4, 1) (E) 17

$(6y, 6x + 4y^3, e^z)$

$6, 10, 1$

MC5 Sia $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ e sia $\alpha > 0$. Allora

$$\int_B \frac{|xy|^\alpha}{x^2 + y^2} \, dx \, dy < +\infty$$

$\frac{r^{2\alpha}}{r^2} = \frac{1}{r^{2-2\alpha}}$

$2 - 2\alpha < 2$

$2\alpha > 0$

$\alpha > 0$

- (A) Se e solo se $\alpha > 1$ (B) Mai (C) Se e solo se $\alpha > 0$ (D) Se e solo se $\alpha > 2$
- (E) Se e solo se $0 < \alpha < 1$

MC3 Consideriamo la curva $\gamma(t) = (\sin t, \cos t)$ definita per $0 \leq t \leq 4\pi$. Allora $\text{Lunghezza}(\gamma) =$

- (A) 0 (B) 2π (C) $\int_0^{4\pi} \sqrt{|\sin t + \cos t|} dt$ ~~(D) 4π~~ (E) $\int_0^{4\pi} (|\sin t| + |\cos t|) dt$

MC6 Sia $D = [-1, 1] \times [-1, 1]$. Allora $\min_D 4x - y^2 =$ $x = -1, y = \pm 1$

- (A) Non esiste (B) 0 (C) -5 (D) -4 (E) -3

MC7 Stabilire QUALI delle seguenti funzioni ammettono limite per $x^2 + y^2 \rightarrow +\infty$.

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - xy, \quad g(x, y) = |x|^3 + |y|^3, \quad h(x, y) = \arctan(x^2 + y^2).$$

ok $\rho^4 - \rho^2$ ρ^3 ok $\frac{\pi}{2}$

- (A) Solo g e h (B) Nessuna (C) Tutte (D) Solo g (E) Solo f

MC8 Sia $D = [-1, 1] \times [0, 1] \times [0, 2]$. Allora $\int_D 5y \, dx \, dy \, dz = \dots$

$$5 \iiint_D y = 5 \int_0^1 y \, dy \cdot 4 \cdot \frac{1}{2}$$

- ~~(A) 10~~ (B) 20 (C) 0 (D) 15 (E) 5

$$(x^2 + y^2)^2 - xy = \rho^4 - \rho^2 \cos \theta \sin \theta$$

$$\geq \underbrace{\rho^4 - 327 \rho^2}_{\rightarrow +\infty}$$

$$|x|^3 + |y|^3 = \rho^3 (|\cos \theta|^3 + |\sin \theta|^3) \geq \underbrace{m \rho^3}_{\downarrow +\infty} \quad \text{con } m > 0$$

$$m = \min \{ |\cos \theta|^3 + |\sin \theta|^3 : \theta \in [0, 2\pi] \}$$

Per m , il min. esiste ed è il valore per un certo θ_0 , quindi

$$m = |\cos \theta_0|^3 + |\sin \theta_0|^3$$

Può essere $m = 0$? Dovrebbe essere allo stesso tempo

$$\cos \theta_0 = 0 \quad \text{e} \quad \sin \theta_0 = 0$$

ma questo non è possibile, quindi $m > 0$.

$$\lim_{x^2 + y^2 \rightarrow +\infty} |x|^3 + y^3 \quad \text{n.e.}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(0, t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^3 = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} f(0, t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} t^3 = -\infty$$

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow \infty}$$

$$x^2 + y^2 - xy$$

$$x^2 + y^2 - xy \geq v(x^2 + y^2) \text{ con } v > 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Tr} > 0$$

$$\text{Det} > 0$$

$\Rightarrow$ autovalori $++ \Rightarrow$ definita positiva
 $\Rightarrow$ coerciva

$$\rho^2 (1 - \cos \theta \sin \theta) \geq \rho^2 (1 - \underbrace{\mu}_{\max < 1})$$

VF1 La funzione $f(x, y) = e^{x+y}$ è una primitiva della forma $e^y dx + e^x dy$ **F**

VF2 L'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \leq 4, z \leq 0\}$ è limitato $(-n, 0, 0)$ a sta $\neq$
 $(0, 0, -n)$

VF3 La funzione $f(x, y) = \sin(xy)$ NON ha punti stazionari **F**

VF4 $(x^2 - y^4)^2 = o((x^2 + y^2)^{5/2})$ per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ **F**

VF5 La curva $(\sin^2 t, t^2)$ con $-1 \leq t \leq 1$ è semplice **F** $\gamma(t) = \gamma(-t)$

VF6 L'estremo inferiore su $\mathbb{R}^2$ della funzione xy^2 è $-\infty$ $f(t, 1)$ $f(-t, t)$ **V**

VF7 Il vettore (y^2, y, x^2) è un rotore $\text{div} = 1$ **F**

VF8 La retta tangente alla curva $\gamma(t) = (2t, (t-1)^2)$ nel punto $t = 1$ è la retta $y = 0$ **V**

$$\gamma(1) = (2, 0)$$

$$\dot{\gamma}(1) = (2, 0)$$

$$\dot{\gamma}(t) = (2, 2(t-1))$$

$$(2, 0) + t(2, 0)$$



MC1 Sia $D = [-1, 1] \times [-1, 1]$. Allora $\max_D 4x - y^2 =$ $x=1, y=0$

(A) Non esiste (B) 4 (C) 0 (D) 3 (E) 5

MC2 Sia $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$. Allora $\int_B 7z \, dx \, dy \, dz = \dots$

$$= \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \, \rho^3 \sin \varphi \cos \varphi$$

(A) $7 \int_0^1 d\rho \int_0^{\pi/2} \rho^2 \sin \alpha \cos \alpha \, d\alpha$

(B) 0

(C) $14\pi \int_0^1 d\rho \int_0^{\pi/2} \rho^3 \sin^2 \alpha \, d\alpha$

(D) $7 \int_0^1 d\rho \int_0^{\pi/2} \rho^3 \sin \alpha \cos \alpha \, d\alpha$

~~(E) $14\pi \int_0^1 d\rho \int_0^{\pi/2} \rho^3 \sin \alpha \cos \alpha \, d\alpha$~~

MC3 Sia $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq y\}$. Allora $\int_D 4y \, dx \, dy \, dz = \dots$

- (A) 1 (B) $\frac{8}{3}$ (C) $\frac{16}{3}$ (D) $\frac{4}{3}$ (E) 0

MC4 Sia $f(x, y) = e^{2xy} + 3y^5$. Allora $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(0, 2) =$ $f_x = e^{2xy} \cdot 2y$ $f_{xx} = 4y^2 e^{2xy}$

- (A) 16 (B) 4 (C) 8 (D) 1 (E) 0

MC5 Stabilire QUALI delle seguenti funzioni ammettono limite per $x^2 + y^2 \rightarrow +\infty$.

$$f(x, y) = \frac{x}{1 + x^4 + y^4}, \quad g(x, y) = \frac{x^3}{1 + x^4 + y^4}, \quad h(x, y) = \frac{x^5}{1 + x^4 + y^4}.$$

$R(t, t)$
 $R(0, t)$

- (A) Tutte (B) Solo f (C) Solo g e h (D) Solo f e g (E) Solo h

$$4 \int_0^2 dx \int_0^x y \, dy \int_0^y dz = 4 \int_0^2 dx \int_0^x y^2 \, dy = \frac{4}{3} \int_0^2 x^3 \, dx = \frac{1}{3} [x^4]_0^2 = \frac{16}{3}$$

MC7 Sia $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$. Stabilire QUANTI dei seguenti integrali sono nulli.

$$\int_B (x - y) \, dx \, dy, \quad \int_B (x + y) \, dx \, dy, \quad \int_B (x^3 - y^3) \, dx \, dy, \quad \int_B (x^3 + y^3) \, dx \, dy$$

$= 0$ > 0 $= 0$ > 0

- (A) 1 (B) 4 (C) 0 (D) 3 (E) 2

MC8 Consideriamo la curva $\gamma(t) = (\sin^2 t, \cos^2 t)$ definita per $0 \leq t \leq 2\pi$. Allora $\int_{\gamma} x \, ds =$

- (A) 0 (B) $\int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t \, dt$ (C) 2π (D) -2π (E) $\int_0^{2\pi} 2\sqrt{2} \sin^2 t |\sin t \cos t| \, dt$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 t \sqrt{4 \sin^4 t \cos^2 t + 4 \cos^4 t \sin^2 t} \, dt$$

$$= 2\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 t |\sin t \cos t| \, dt$$