

Esempio 1 $\iiint_A \frac{z^a}{x^2+y^4+z^6} dx dy dz$

$$A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \}$$

Pareggio e vedo che succede

$$x = u^6 \quad y = v^3 \quad z = w^2$$

$$J = \begin{pmatrix} 6u^5 & 0 & 0 \\ 0 & 3v^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2w \end{pmatrix}$$

$$\text{Det} = 36 u^5 v^2 w$$

La zona di integr. diventa $u \geq 0, v \geq 0, w \geq 0, u^{12} + v^6 + w^4 \leq 1$

Ma possiamo sostituire con $u^2 + v^2 + w^2 \leq 1$ (così usiamo coord. polari nelle nuove variabili)

Alla fine ci siamo ridotti a $\iiint_{\substack{u^2+v^2+w^2 \leq 1 \\ u,v,w \geq 0}} \frac{w^{2a}}{u^{12}+v^{12}+w^{12}} 36 u^5 v^2 w$

Brutal mode: $f \sim \frac{\rho^{2a+5+2+1}}{\rho^{12}} = \frac{1}{\rho^{4-2a}}$

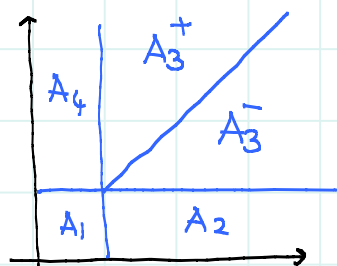
e quindi converge $\Leftrightarrow 4-2a < 3 \Leftrightarrow a > \frac{1}{2}$

La dimostrazione rigorosa ha i soliti due casi.

Esempio 2 $\iint_Q xy e^{-x^2 y} dx dy$

$$Q = [0, +\infty) \times [0, +\infty)$$

$\iint_{A_1} \dots$ converge (è proprio)



[Oss.: si potrebbe impostare direttamente cartesiano facendo le primitive ...]

Esaminiamo A_3 In A_3 vale

$$xy e^{-x^2y} \leq xy e^{-x^2} \quad \text{ma ora}$$

$$\iint_{A_3} xy e^{-x^2y} dx dy \leq \iint_{A_3} xy e^{-x^2} dx dy = \int_1^{+\infty} x e^{-x^2} dx \underbrace{\int_1^{+\infty} y dy}_{+\infty}$$

Se sono solo in A_3^- , allora

$$\begin{aligned} \iint_{A^-} xy e^{-x^2} dx dy &= \int_1^{+\infty} x e^{-x^2} dx \underbrace{\int_1^x y dy}_{\leq x} \\ &\leq \int_1^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx \text{ e questo converge} \end{aligned}$$

In A_3^+ usiamo la stima $xy e^{-x^2y} \leq xy e^{-y}$ e concludiamo come sopra:

$$\begin{aligned} \iint_{A^+} xy e^{-y} dx dy &= \int_1^{+\infty} y e^{-y} dy \int_1^y x dx \\ &\leq \int_1^{+\infty} y^3 e^{-y} dy \text{ e questo converge.} \end{aligned}$$

Esaminiamo A_2

$$\begin{aligned} \iint_{A_2} xy e^{-x^2y} dx dy &\leq \iint_{A_2} x e^{-x^2y} dx dy \\ &\quad \uparrow \\ &\quad y \leq 1 \\ &= \int_1^{+\infty} dx \int_0^1 dy x e^{-x^2y} \\ &= \int_1^{+\infty} dx \left[-\frac{1}{x} e^{-x^2y} \right]_{y=0}^{y=1} \end{aligned}$$

$$= \int_1^{+\infty} dx \left\{ \underbrace{-\frac{1}{x} e^{-x^2}}_{\text{converge}} + \underbrace{\frac{1}{x}}_{\text{diverge}} \right\}$$

Però avendo detto $\leq \dots$ questo non basta

Nuova idea: su A_2 posso integrare rispetto a x

$$\begin{aligned} \iint_{A_2} xy e^{-x^2y} dx dy &= \int_0^1 dy \int_1^{+\infty} dx yx e^{-x^2y} \\ &= \int_0^1 dy \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2y} \right]_{x=1}^{x=+\infty} \\ &= \int_0^1 dy \left(+\frac{1}{2} e^{-y} \right) = \text{converge} \end{aligned}$$

Consideriamo ora A_4

$$\begin{aligned} \iint_{A_4} \dots &= \int_1^{+\infty} dy \int_0^1 dx yx e^{-x^2y} \\ &= \int_1^{+\infty} dy \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2y} \right]_{x=0}^{x=1} \\ &= \int_1^{+\infty} dy \left\{ \underbrace{-\frac{1}{2} e^{-y}}_{\text{converge}} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{diverge}} \right\} \end{aligned}$$

Quindi globalmente diverge per colpa di A_4 .

[A posteriori si poteva fare direttamente la primitiva]

Esempio 3

$$\iint_Q \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2} dx dy$$

$$Q = [0, +\infty) \times [0, +\infty)$$

1° problema: origine, ma è un falso problema perché la funzione è più limitata in un intorno di 0.

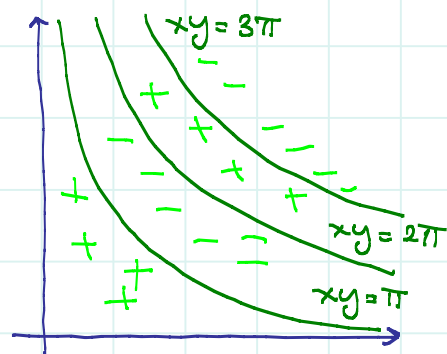
2° problema: segno che varia tantissimo, quindi occorre separare le zone + e -

Brutal mode: le zone + sono metà di Q
il sin è grande in metà delle zone +

→ stiamo integrando $\frac{1}{x^2}$ in $\frac{1}{4}$ di Q

→ diverge sul + e sul -

→ globalmente indeterminato.

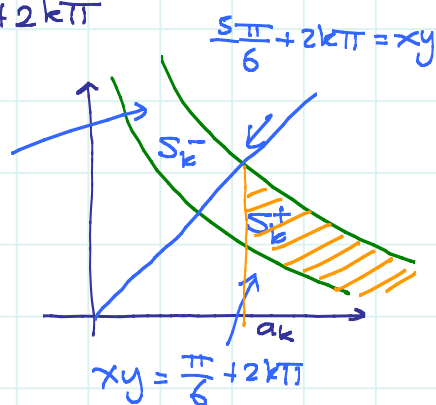


Dove è che $\sin t \geq \frac{1}{2}$?

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq t \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

k-esima zona in cui $\sin x \geq \frac{1}{2}$

Chiamiamo S_k questa zona



$$\iint_{S_k} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2} dx dy \geq \frac{1}{2} \iint_{S_k} \frac{1}{x^2+y^2} dx dy$$

$$\geq \frac{1}{2} \iint_{S_k^+} \frac{1}{x^2+y^2} dx dy$$

$$= \frac{1}{4} \iint_{S_k^+} \frac{1}{x^2} dx dy$$

$$\geq \frac{1}{4} \int_{a_k}^{+\infty} dx \int_{\frac{1}{x}(\frac{\pi}{6} + 2k\pi)}^{\frac{1}{x}(\frac{5\pi}{6} + 2k\pi)} \frac{1}{x^2} dy$$

$$\geq \frac{1}{4} \int_{a_k}^{\infty} dx \quad \frac{1}{x^2} \quad \underbrace{\frac{2\pi}{3} \frac{1}{x}}_{\text{lungh. intervallo}}$$

$$= \frac{\pi}{6} \int_{a_k}^{\infty} \frac{1}{x^3} dx$$

$$= \frac{\pi}{6} \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{x^2} \right]_{x=a_k}^{x=\infty}$$

$$= \frac{\pi}{12} \frac{1}{a_k^2}$$

Da questo concludiamo che

$$\iint_{\text{parte positiva}} \dots \geq \frac{\pi}{12} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{a_k^2}$$

Ora $a_k^2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, quindi $\sum \frac{1}{a_k^2} = \sum \frac{1}{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi} = +\infty$

[Alternativa: dimostrare una stima dal basso per $\iint_{S_k}$ usando le coord. polari]

— 0 — 0 —