

Esercizio 3 $\iiint_A \frac{xy}{(x^2+y^2+z^2)^a} dx dy dz$ $a > 0$ parametro reale

$$A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \}$$

Se converge, allora per simmetria fa 0.

Per studiare la convergenza, mettiamoci per comodità su $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

Sembra ragionevole andare in sferiche (dei geografi)

Brutal mode: $f \sim \frac{\rho^2}{\rho^{2a}} = \frac{1}{\rho^{2a-2}}$ $2a-2 < 3$

Congettura: converge $\Leftrightarrow a < \frac{5}{2}$

Punk (a): converge per $a < \frac{5}{2}$

$$f(\dots) = \frac{\rho^2 \overbrace{\cos^2 \varphi \cos \theta \sin \theta}^{\leq 1}}{\rho^{2a}} \leq \frac{\rho^2}{\rho^{2a}}$$

A questo punto

$$\begin{aligned} \iiint_{\text{ottante}} \dots &\leq \int_0^1 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \frac{1}{\rho^{2a-2}} \cdot \underbrace{\rho^2 \cos \varphi}_{\leq 1} \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{1}{\rho^{2a-4}} d\rho \quad 2a-4 < 1 \leadsto \text{converge} \end{aligned}$$

Punk (b): diverge per $a \geq \frac{5}{2}$

$$\iiint_{\text{ottante}} \dots \stackrel{\uparrow \uparrow}{=} \int_0^1 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \frac{\rho^2 \cos^2 \varphi \cos \theta \sin \theta}{\rho^{2a}} \cdot \rho^2 \cos \varphi$$

$$= \underbrace{\int_0^1 \frac{dp}{p^{2a-4}}}_{\text{Diverge se } a \geq \frac{5}{2}} \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta}_{\text{numero} > 0} \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi d\varphi}_{\text{Numero} > 0}$$

Alternativa (più versatile): riempiccioline la zona in modo da limitare dal basso le parti trigonometriche

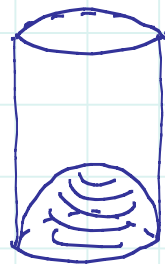
$$\begin{aligned} \iiint_{\text{ottante}} \dots &= \int_0^1 dp \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \text{ come prima} \\ &\geq \int_0^1 dp \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \text{ stessa roba} \\ &\geq m > 0 \\ &\geq m \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) \cdot \left(\frac{\pi}{4} - 0 \right) \cdot \int_0^1 \frac{1}{p^{2a-4}} dp \end{aligned}$$

$$A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \geq 12 \}$$

Tutto analogo, solo che ora converge per $a > \frac{5}{2}$.

$$A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 1, 0 \leq y \leq 2 \} \quad (\text{cilindro infinito lungo asse } y)$$

$$\iiint_A \frac{xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^a} dx dy dz$$



Esattamente come prima, perché conv. su semisfera $\Leftrightarrow$ conv. su cilindro

$$A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 1, y \geq 1 \}$$

Brutal mode : $\frac{|xy|}{(x^2+y^2+z^2)^a} \leq \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^a} = \frac{\rho}{\rho^{2a}} = \frac{1}{\rho^{2a-1}}$

$$2a-1 > 3 \quad a > 2 \text{ converge}$$

UHH... forse è + un problema 1 dimensionale

$$2a-1 > 1 \rightsquigarrow a > 1 \text{ converge}$$

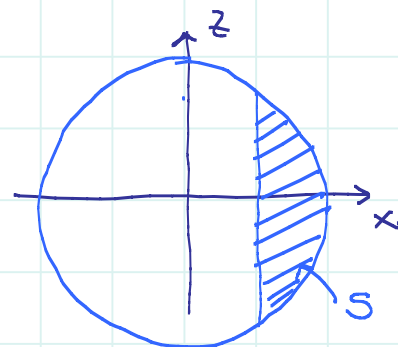
Per $a > 1$ converge

$$\begin{aligned} \iiint_{\text{cilindro}} \frac{|xy|}{(x^2+y^2+z^2)^a} dx dy dz &\stackrel{|x| \leq 1}{\leq} \iiint_{\text{cilindro}} \frac{y}{y^{2a}} \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{dy}{y^{2a-1}} \underbrace{\iint_{x^2+z^2 \leq 1} 1 dx dz}_{\substack{\text{base} \\ \text{Area base}}} \\ &\stackrel{\text{converge}}{\Leftrightarrow} a > 1 \end{aligned}$$

Per $a < 1$ diverge (e quindi glob. è INDET.)

$$\frac{|xy|}{(x^2+y^2+z^2)^a} \geq \frac{\frac{1}{2}y}{(y^2+1)^a}$$

$x^2+z^2 \leq 1$
e mi sono messo dove $x \geq \frac{1}{2}$



$$\iiint_{\text{cilindro}} \dots \geq \iint_{\substack{\text{cilindro} \\ \text{con } x \geq \frac{1}{2}}} \frac{1}{2} \frac{y}{(y^2+1)^a} dx dy dz$$

$$\frac{1}{2} \text{Area}(S) \int_1^{+\infty} \frac{y}{(y^2+1)^a} dy$$

converge $\Leftrightarrow a > 1$ per
confronto asintotico
con $\frac{y}{y^{2a}}$

— 0 — 0 —

Esempio 2

$$\iiint_{\text{ottante}} \frac{\log(1+x^2yz)}{(x^4+y^4+z^4)^a} dx dy dz$$

Ci sono due problemi a 0 e a infinito.

Brutal mode:

$$\rightarrow \text{prob. in origine: } f \sim \frac{\log(1+\rho^4)}{\rho^{4a}} = \frac{\rho^4}{\rho^{4a}} \quad \text{conv.} \Leftrightarrow 4a-4 < 3 \\ \Leftrightarrow a < \frac{7}{4}$$

$$\rightarrow \text{prob. all'infinito: } f \sim \frac{\log(1+\rho^4)}{\rho^{4a}} \sim \frac{\log \rho}{\rho^{4a}} \quad \text{conv.} \Leftrightarrow 4a > 3 \\ \Leftrightarrow a > \frac{3}{4}$$

Congettura: globalmente converge $\Leftrightarrow \frac{3}{4} < a < \frac{7}{4}$

Converge per $\frac{3}{4} < a < \frac{7}{4}$ Passiamo in sferiche e otteniamo

$$f(\dots) \leq \frac{\log(1+\rho^4)}{(m\rho^4)^a}$$

dove m = mix di tutta la roba trigonometrica.

Si stima $J = \rho^2 \cos \varphi$ con ρ^2 e si conclude

(senza il risultato di Analisi 1 per cui

$$\int_7^{+\infty} \frac{\log x}{x^b} dx \quad \text{converge} \Leftrightarrow b > 1)$$

Diverge per $a \leq \frac{3}{4}$ Restringiamo l'integrale a

$$\rho \geq 1 \quad \vartheta \in \left[\frac{\pi}{33}, \frac{\pi}{6}\right] \quad \varphi \in \left[\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}\right]$$

↑
quello dei geografi,
così z sta lontano da 0.

A questo punto

$$\text{Numeratore} \geq \log(1+m_0 \rho^4)$$

↑
roba trigo. è lontano da 0

Denominatore $\leq (3\rho^4)^a$
 $\uparrow$ sente frazione + piccola
 $\nwarrow$ stimo x, y, z con ρ

$$\iiint \geq \iiint_{\text{zona + piccola}} \geq \text{costante} \int_1^{+\infty} \frac{\log(4400\rho^4)}{\rho^{4a}} \rho^2 d\rho$$

$\uparrow$ stimo anche dal basso il $\int$
 qui serve $\rho^{\frac{4}{2}}$ lontano da

e si conclude con analisi

Divergenza per $a \geq \frac{7}{4}$

Stessa cosa, ma ora è rilevante il problema nell'origine, quindi ora

$$0 \leq \rho \leq 1 \dots$$

— 0 — 0 —