

Calcolo INTEGRALE GAUSSIANO

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Brutal mode Calcolo

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy$$

e lo faccio in due modi.

Modo cartesiano

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{-x^2-y^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{-x^2} \cdot e^{-y^2}$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx}_I \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy}_I = I^2 \quad (\text{il quadrato di quello che voglio})$$

Modo polare

$$= \int_0^{+\infty} dp \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} e^{-p^2} \cdot p = \pi \int_0^{+\infty} 2p e^{-p^2} dp = \pi \left[-e^{-p^2} \right]_{p=0}^{p=+\infty} = \pi$$

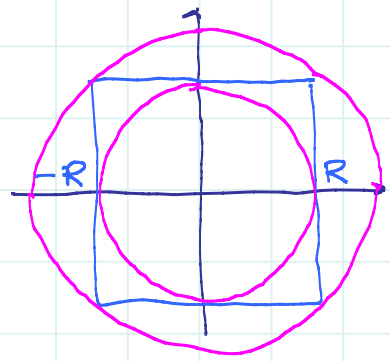
Confrontando: $I^2 = \pi \leadsto I = \sqrt{\pi}$

Rendiamolo più rigoroso Poisson

$$I(R) = \int_{-R}^R e^{-x^2} dx$$

Osserviamo che

$$B(0, R) \subseteq Q_R = [-R, R]^2 \subseteq B(0, R\sqrt{2})$$



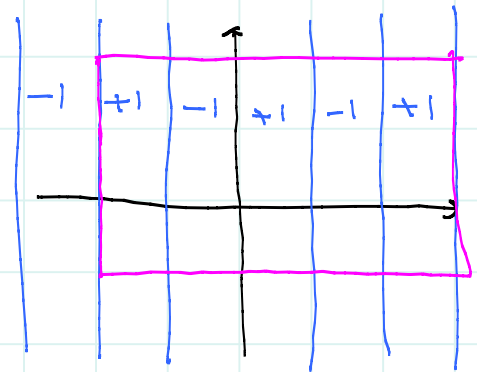
Allora

$$\begin{aligned} \iint_{B(0, R)} e^{-x^2-y^2} &\leq \iint_{Q_R} e^{-x^2-y^2} \dots \leq \iint_{B(0, R\sqrt{2})} e^{-x^2-y^2} \dots \\ &\quad \parallel \\ \int_0^R dp \int_0^{2\pi} d\theta \, p e^{-p^2} &\leq I(R)^2 \leq \int_0^{R\sqrt{2}} dp \int_0^{2\pi} d\theta \, p e^{-p^2} \\ &\quad \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\ &\quad \pi \quad \quad I^2 \quad \quad \pi \end{aligned}$$

Ancora una volta $I^2 = \pi$

Esempio burocratico $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy$

Se rivado $\mathbb{R}^2$ con quadrati o cerchi simmetrici risp. all'asse y il limite viene 0.



Ma se rivado con rettangoli asimmetrici del tipo

$$[-2m, -2m+1] \times [-m, m] = R_m$$

allora il limite viene $+\infty$.

Analogamente lo posso fare venire $-\infty$.

— 0 — 0 —

Esempio 1

$$\iint_Q \frac{1}{x^4+y^4+1} dx dy$$

$Q = \text{primo quadrante}$

Brutale: unico pbm. la zona di integr., $f(x,y) \sim \frac{1}{\rho^4}$, $4 > 2$ e quindi converge

Passiamo in polari:

$$\int_0^{+\infty} \rho d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \frac{1}{\rho^4(\cos^4\theta + \sin^4\theta) + 1} \rho \leq \quad \text{(dovrei fare } \int_0^{\infty} d\rho \dots)$$

↑ perché punto alla convergenza

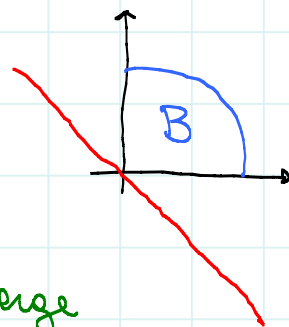
$$\int_0^{+\infty} \rho d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \frac{1}{m\rho^4+1} \rho$$

↑ solito discorso: $\cos^4\theta + \sin^4\theta \geq m > 0$ perché...

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\rho}{m\rho^4+1} d\rho = \text{converge per confronto asintotico con } \frac{1}{\rho^3}$$

Esempio 2 $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2 \leq 1\}$

$$\iint_B \frac{1}{x+y} dx dy$$



Brutale: solo pbm. in $(0,0)$, $f(x,y) \sim \frac{1}{\rho} \leadsto$ converge

Coord. polari:

$$\int_0^1 \rho d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \frac{1}{\cancel{\rho}(\cos\theta + \sin\theta)} \cancel{\rho}$$

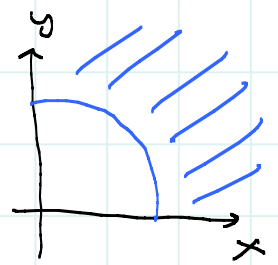
dovrei mettere $\varepsilon > 0$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos\theta + \sin\theta} d\theta = \text{numero}$$

↑ integrale proprio perché $\cos\theta + \sin\theta \geq m > 0$ per $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

(se fosse $\theta \in [0, \pi]$ non sarebbe vero!!!)

Esempio 3 $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$



$$\iint_D \frac{xy}{1+x^4+y^4} dx dy$$

Brutale: unico problema $+\infty$, $f(x,y) \sim \frac{1}{p^2} \Rightarrow$ diverge al polo

Polari: $\int_1^{+\infty} dp \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{p^2 \cos \theta \sin \theta}{1+p^4(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{pag.}}}{p} \geq \uparrow$
 così posso mettere solo 0 😞

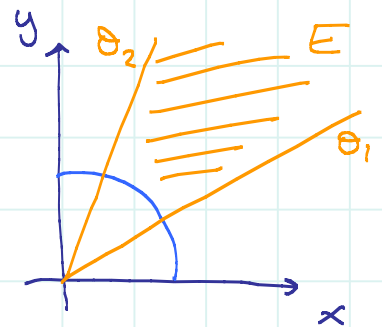
Prima uscita: $\geq \int_1^{+\infty} dp \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{p^3 \cos \theta \sin \theta}{1+2p^4}$

$$= \int_1^{+\infty} \underbrace{\frac{p^3}{1+2p^4}}_{\substack{\uparrow \\ \text{diverge per} \\ \text{conf. asint. con } \frac{1}{p}}} \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta}_{\substack{\text{si fa e viene numero } > 0}} = +\infty$$

Seconda uscita: **RESTRINGO LA ZONA DI INTEGRAZIONE**

Nella zona E vale la stima

$$\frac{p^3 \cos \theta \sin \theta}{1+p^4(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)} \geq \frac{p^3 m}{1+2p^4}$$



dove $m = \min \{ \cos \theta \sin \theta : \theta \in [\theta_1, \theta_2] \} > 0$ per il solito motivo

$$\begin{aligned} \iint_D \dots &\geq \iint_E \dots \geq \int_1^{+\infty} dp \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \frac{p^3 m}{1+2p^4} \\ &= (\theta_2 - \theta_1) m \int_1^{+\infty} \frac{p^3}{1+2p^4} dp \end{aligned}$$

e si chiude con Analisi 1.

Esempio 4 $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$

$$\iint_S \frac{xy}{1+x^4+y^4} dx dy = \text{INDETERMINATO} !!!!!$$

$$f(-x, y) = -f(x, y)$$

e il dominio è simmetrico,

ma non basta



= $+\infty$ nel 1° quadrante $-\infty$ nel 2° quadrante

$$\iint_S \frac{xy}{1+x^6+y^6} dx dy = 0$$

Ora i pezzi sul 1° e 2° quadrante convergono (perché $\sim \frac{1}{p^4}$)
e quindi si compensano !!

— o — o —