

INTEGRALI IMPROPRI

$$\iint_A f(x,y) dx dy$$

L'integrale è improprio se succede almeno una di queste proprietà:

→ A è un insieme NON LIMITATO

→ $f(x,y)$ è NON LIMITATA in A.

Analogo di Analisi 1

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2} dx$$

↑
funzione

$$\int_4^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$$

↑
zona integr.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^4} dx$$

↑
Due problemi

Un integrale improprio si dice MONOPROBLEMA se ha un problema solo, cioè

→ la zona di int. A è non limitata

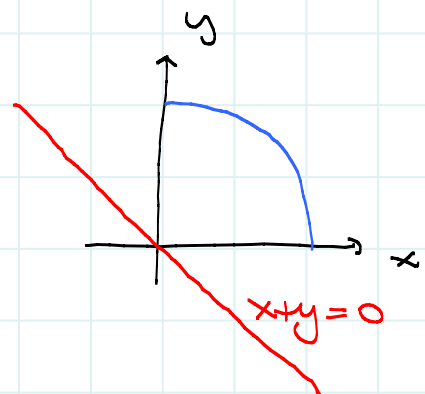
→ la zona di integr. è limitata, ma $f(x,y)$ è non limitata nell'intorno di un p.to della chiusura di A

Esempio $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x > 0, y > 0 \}$

$$\iint_A \frac{1}{x+y} dx dy$$

↑

Non limitata solo in un intorno di (0,0)



Analisi 1

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \underbrace{\int_{\varepsilon}^2 \frac{1}{x^2} dx}_{\text{proprio } \forall \varepsilon > 0}$$

$$\int_4^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_4^A \frac{1}{x^3} dx$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^4} dx = \int_0^{42} \frac{\sin x}{x^4} dx + \int_{42}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^4} dx$$

$\uparrow$ $\uparrow$
monoproblema

Posso sostituire 42
con un qualunque
 $a > 0$

Analisi 2

Si fa più o meno la stessa, ma solo nel caso in cui $f(x, y) \geq 0$ in A .

Se $f(x, y)$ NON ha segno costante in A , allora si pone per definizione

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \underbrace{\iint_{A^+} f(x, y) dx dy}_{\substack{\uparrow \\ \text{zona dove} \\ f(x, y) \geq 0}} + \iint_{A^-} f(x, y) dx dy$$

$\uparrow$
zona dove $f(x, y) \leq 0$

poi si studiano separatamente i due pezzi e si traggono le conclusioni.

Ciascuno dei due può convergere oppure divergere a $+\infty$ (il primo) o $-\infty$ (il secondo).

Se alla fine ci troviamo $+\infty - \infty$, allora quello globale si dichiara indeterminato

Definizioni

Sia $f(x,y) \geq 0$ in $A \subseteq \mathbb{R}^2$

Caso 1 Supponiamo A non limitato, ma f limitata sui limitati. Allora

$$\iint_A f(x,y) dx dy = \lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{A_R} f(x,y) dx dy$$

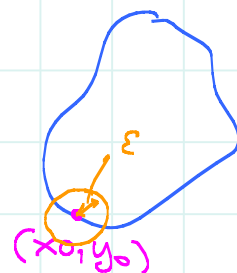
dove $A_R = A \cap B(0,R)$

↑
Fissato $R > 0$, questo è un integrale proprio

Il limite esiste, e sta in $[0, +\infty)$ oppure $+\infty$, perché è il limite di una funzione crescente di R .

Caso 2 Supponiamo A limitato, ma f con dei problemi nell'intorno di un p.to (x_0, y_0) nella chiusura di A . Allora

$$\iint_A f(x,y) dx dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \iint_{A \setminus B((x_0, y_0), \varepsilon)} f(x,y) dx dy$$



Anche qui il limite esiste per monotonia.

Oss. strategica

Il fatto che $f(x,y) \geq 0$ nella zona A ci garantisce che otterremmo lo stesso risultato usando quadrati, rettangoli, triangoli, ... invece dei cerchi.

Altrimenti si trovano facili controesempi

Analisi 1

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx < +\infty, \text{ ma } \int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx = +\infty$$

Analisi 2

$$\iint_A f(x,y) dx dy < +\infty \Leftrightarrow \iint_A |f(x,y)| dx dy < +\infty$$

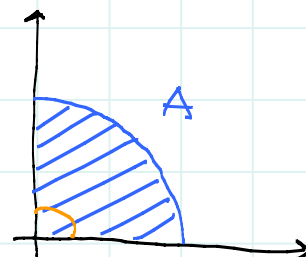
(la def. spezza A_+ e A_-)

Analisi 1

$$\int_0^5 \frac{1}{x^a} dx = \begin{cases} \nearrow \text{converge se} & a < 1 \\ \searrow \text{diverge a } +\infty \text{ se} & a \geq 1 \end{cases}$$

$$\int_5^{+\infty} \frac{1}{x^a} dx = \begin{cases} \nearrow \text{converge se} & a > 1 \\ \searrow \text{diverge a } +\infty \text{ se} & a \leq 1 \end{cases}$$

Esempio 1 $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$



$$\iint_A \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^a} dx dy = \begin{cases} \nearrow \text{converge se} & a < 2 \\ \searrow \text{diverge a } +\infty \text{ se} & a \geq 2 \end{cases}$$

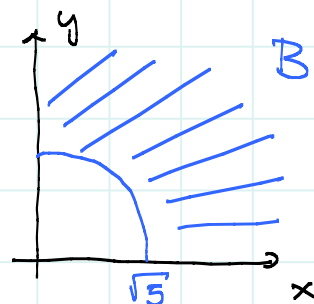
$$\iint_A \frac{1}{(\sqrt{\dots})^a} dx dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \underbrace{\int_{\varepsilon}^1 dp \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta}_{\text{corona circolare}} \frac{1}{p^a} \cdot p$$

$$= \frac{\pi}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{p^{a-1}} dp = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{1}{p^{a-1}} dp$$

e l'ultimo converge se e solo se $a-1 < 1$, cioè se e solo $a < 2$.

Esempio 2 $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 5, x \geq 0, y \geq 0\}$

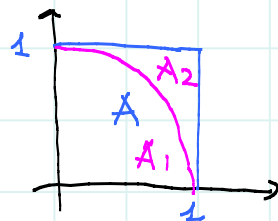
$$\iint_B \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^a} dx dy = \begin{cases} \nearrow \text{converge se} & a > 2 \\ \searrow \text{diverge a } +\infty \text{ se} & a \leq 2 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \iint_B \frac{1}{(\sqrt{\dots})^a} dx dy &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\sqrt{5}}^R dp \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \frac{1}{p^a} \cdot p \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2} \int_{\sqrt{5}}^R \frac{dp}{p^{a-1}} = \frac{\pi}{2} \int_{\sqrt{5}}^{+\infty} \frac{dp}{p^{a-1}} \end{aligned}$$

Esempio 3

$$A = [0, 1] \times [0, 1]$$



$$\iint_A \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy \text{ converge}$$

$$\iint_A \dots = \iint_{A_1} \dots + \iint_{A_2} \dots$$

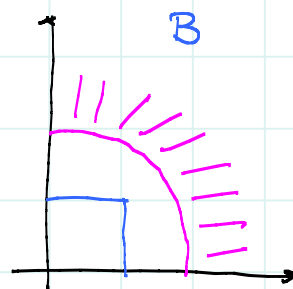
↑
converge perché
è l'esempio 1
con $\alpha = 1 < 2$

↑
integrale proprio
senza nessun problema

Esempio 4

$$B = [0, +\infty) \times [0, +\infty) \setminus A \quad \uparrow \text{di prima}$$

$$\iint_B \frac{1}{x^2+y^2} dx dy \text{ diverge}$$



$$\iint_B \frac{1}{x^2+y^2} dx dy \geq \iint_C \frac{1}{x^2+y^2} dx dy = +\infty$$

↑
 $x^2+y^2 \geq 27$

↑
esempio 2
con $\alpha = 2$

— o — o —