

Conseguenza di STOKES

Il flusso di un rotore attraverso una sup. chiusa (senza bordo) è sempre nullo

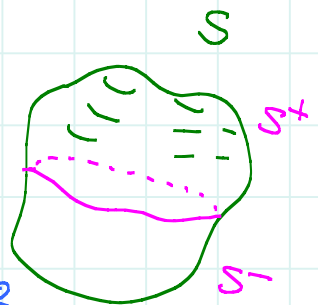
$$\int_S \langle \operatorname{rot} \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_{\partial S} \langle \vec{E}, \vec{\tau} \rangle ds$$

↑
se è vuoto, questo viene 0

$$\int_{S^+} \langle \operatorname{rot} \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_{\partial S^+} \langle \vec{E}, \vec{\tau} \rangle ds$$

$$\int_{S^-} \langle \operatorname{rot} \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_{\partial S^-} \langle \vec{E}, \vec{\tau} \rangle ds$$

scritto così, il $\vec{\tau}$ è opposto sopra e sotto



Ora $\partial S^+ = \partial S^-$, però sono percorsi in maniera opposta (se ho S^+ a dx, avrò S^- a sx, e viceversa).

Quindi quando sommo viene 0.

— o — o —

INVERSIONE DEL ROTORE

Dato un campo $E = (A, B, C)$, trovare un campo F t.c.

$$\operatorname{rot} F = E$$

Cond. necessaria: $\operatorname{div} \vec{E} = 0$

La cond. è pure sufficiente se l'insieme di def. è fatto bene (ad esempio $\mathbb{R}^3$, parallelepipedo, stellato, senza buchi 2-dim.)

Esempio

$$E = (xy + z^2, y^2 - xz, -3yz + x^4)$$

$$\operatorname{div} E = y + 2y - 3y = 0 \quad \checkmark$$

Quindi esiste F su $\mathbb{R}^3$ t.c. $\operatorname{rot} F = E$

Partiamo dalla formula

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A & B & C \end{pmatrix} \quad \operatorname{rot} E = (C_y - B_z, A_z - C_x, B_x - A_y)$$

Devo trovare A, B, C t.c.

$$C_y - B_z = xy + z^2$$

$$A_z - C_x = y^2 - xz$$

$$B_x - A_y = -3yz + x^4$$

Posso scegliere come mi pare una delle 3 componenti, ad esempio
 $C \equiv 0$

Otteniamo

$$\begin{aligned} -B_z &= xy + z^2 & \leadsto B &= -xyz - \frac{1}{3}z^3 + \varphi(x, y) \\ A_z &= y^2 - xz & \leadsto A &= y^2z - \frac{1}{2}xz^2 + \psi(x, y) \end{aligned}$$

$\swarrow$ qualunque
 $\swarrow$ purché
senza z

Posso scegliere come mi pare una delle 2 funzioni φ e ψ , ad esempio
 $\psi \equiv 0$

Ora sostituisco A e B nella 3^a equazione

$$B_x - A_y = \cancel{-yz} + \varphi_x(x, y) - \cancel{2yz} = \cancel{-3yz} + x^4$$

Tutte le z se ne devono andare

$$\leadsto \varphi_x(x, y) = x^4 \quad \leadsto \frac{1}{5}x^5$$

Conclusione
$$F = \left(y^2z - \frac{1}{2}xz^2, -xyz - \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{5}x^5, 0 \right)$$

[Verificare che torni]

Variante Trovare F con $\text{rot } F = E$ e prima componente xy .

1° modo Ripeto la procedura usando $A = xy$

2° modo Ricordo che $\text{rot } F_1 = \text{rot } F_2$ se e solo se (negli insiemi decenti)

$$F_2 = F_1 + \nabla g \quad (\text{differiscono per un gradiente})$$

Quindi basta prendere F di prima e aggiungere un

$$\nabla g = (xy - y^2z + \frac{1}{2}xz^2, \dots, \dots)$$

Basta prendere $g(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2y - xy^2z + \frac{1}{6}x^2z^2 +$ volando roba con y e z

— o — o —

Giustificazione formale del procedimento

$E = (A, B, C)$. Cerco F della forma $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})$.

Devo risolvere

$$\hat{C}_y - \hat{B}_z = A$$

$$\hat{A}_z - \hat{C}_x = B$$

$$\hat{B}_x - \hat{A}_y = C$$

$$-\hat{B}_z = A$$

$$\hat{A}_z = B$$

$$\hat{B}_x - \hat{A}_y = C$$

$$\hat{A} = \bar{B} + \varphi(x, y)$$

↑
primitiva di B rispetto a z

$$\hat{B} = -\bar{A} + \psi(x, y)$$

↑
primitiva di A rispetto a z

↑
Qua prendo $\psi \equiv 0$

Analando nella 3ª equazione troviamo

$$\hat{B}_x - \hat{A}_y = -\bar{A}_x - \bar{B}_y - \varphi_y(x, y) = C$$

In conclusione mi trovo a risolvere

$$\varphi_B(x,y) = -\bar{A}_x - \bar{B}_y - C$$

Posso risolvere? Sento che RHS non dipenda da z , quindi mi sento che la sua derivata risp. a z sia nulla

$$\begin{aligned}(\bar{A}_x + \bar{B}_y + C)_z &= \bar{A}_{xz} + \bar{B}_{yz} + C_z \quad (\text{uso che } \bar{A}_z = A \text{ e } \bar{B}_z = B) \\&= A_x + B_y + C_z \\&= \operatorname{div} E = 0.\end{aligned}$$

Domanda: dove nella dim. abbiamo usato che Ω è fatto bene?

LA SOLITA IN $\mathbb{R}^3$ Consideriamo

(Campo gravitazionale)

$$E = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x, y, z)$$

Un conto abbastanza semplice mostra che $\operatorname{div} E = 0$ (esercizio)

Dico che E non è il rotore di F su $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$

Sia S la sfera unitaria centrata in $(0,0,0)$

$$\int_S \langle \operatorname{rot} F, \vec{n} \rangle d\sigma = 0 \text{ per Stokes (infatti } \partial S = \emptyset)$$

$$\int_S \langle \vec{n}, \vec{3} \rangle d\sigma = \int_S \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} d\sigma = \text{Area}(S) = 4\pi$$

$\uparrow$
 $\vec{e}(x, y, z)$

$\uparrow$
 $= 1$ sulla sfera

1 0 1 0 1