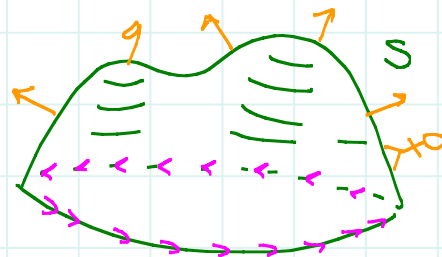


ORIENTAZIONE DEL BORDO DI UNA SUPERFICIE

Come si orienta il bordo di una sup.?

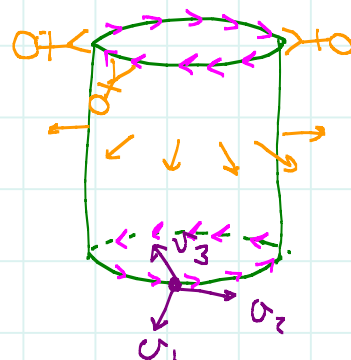


Data una orientazione su una sup. S ,
l'orientazione (verso di percorrenza)
involotta sul bordo è quella di un orologio che,
restando in piedi sulla sup. secondo il
versore normale dato dall'orientazione della sup.,
percorre il bordo lasciando la sup. a sinistra

Esempio Sup. laterale di un cilindro con
orientazione esterna.

Come è orientato il bordo?

Come in figura, quindi in particolare in
maniera opposta nei due pezzi del bordo.



Formalmente abbiamo 3 vettori in gioco

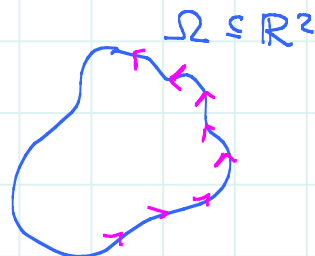
- il versore nel piano tangente alla sup. che punta verso l'esterno. u_1
- il versore corrispondente alla velocità dell'orologio u_2
- il versore normale alla sup. u_3

e questi devono avere la stessa orientazione della base canonica di $\mathbb{R}^3$
cioè la matrice di cambio base ha $\det = +1$.

u_1 = braccio destro di $\hat{z}$
 u_2 = direzione occhi di $\hat{z}$
 u_3 = testa di orologio

Fatto generale comodo Se la sup. è parametrizzata come

$$\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$$



con sufficiente regolarità, e

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

percorre $\partial\Omega$ lasciando Ω a sinistra e $\vec{n} = \Phi_u \wedge \Phi_v$, allora

$$\Phi \circ \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

percorre il bordo della sup. con il verso giusto.

Oss. L'enunciato precedente va interpretato.

Pensiamo al solito cilindro

$$\Phi(u, v) = (2 \cos u, 2 \sin u, v)$$

↑
Raggio 2

$$u \in [0, 2\pi]$$

$$v \in [0, 3]$$

↑
altezza

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ -2 \sin u & 2 \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

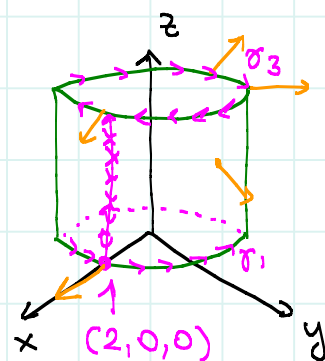
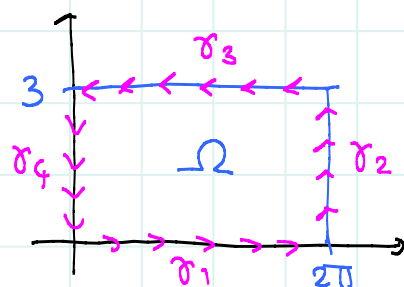
$$\Phi_u \wedge \Phi_v = (2 \cos u, 2 \sin u, 0)$$

= orientazione

Il punto $(2, 0, 0)$ arriva da

$$u = 0 \text{ e } v = 0$$

In quel punto $\Phi_u \wedge \Phi_v = (2, 0, 0)$



Parametrizz. bordo "sotto" : $(2 \cos \theta, 2 \sin \theta, 0)$

" " "sopra" : $(2 \cos \theta, 2 \sin \theta, 3)$ MA percorsa al contrario

— o — o —

FORMULA DI STOKES (aka TEOREMA DEL ROTORE)

Enunciato da fisica: il flusso del rotore attraverso una sup. è uguale alla circuitazione del campo stesso lungo il bordo della superficie

$$\int_S \langle \operatorname{rot} \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_{\partial S} \langle \vec{E}, \vec{\tau} \rangle ds = \int_{\gamma} A dx + B dy + C dz$$

Annotations:

- campo di vettori (orange arrow pointing to $\vec{E}$)
- int. superf. (orange arrow pointing to S)
- superficie (orange arrow pointing to S)
- orientazione della sup. (orange arrow pointing to $\vec{n}$)
- int. curvilineo (green arrow pointing to ∂S)
- versore tang. al bordo nel verso giusto (green arrow pointing to $\vec{\tau}$)
- bordo della superficie (green arrow pointing to ∂S)
- curva o unione di curve che percorre ∂S nel verso giusto (pink arrow pointing to γ)

Uguaglianza tra secondo e terzo è praticamente ovvia se si osserva che, se γ percorre ∂S , allora

$$\vec{\tau} = \left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}, \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dots}}, \frac{\dot{z}}{\sqrt{\dots}} \right)$$

A questo punto

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} \langle \vec{E}, \vec{\tau} \rangle ds &= \int_{\gamma} \left(A \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dots}} + B \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dots}} + C \frac{\dot{z}}{\sqrt{\dots}} \right) \underbrace{\sqrt{\dots}}_{\text{speed}} dt \\ &= \int_{\gamma} (A \dot{x} + B \dot{y} + C \dot{z}) dt = \int_{\gamma} A dx + B dy + C dz \end{aligned}$$

Strategia per la dim. della prima

- Scrivo una param. $\Phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ di S
- Scrivo una param. $\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ di $\partial\Omega$
- Otteengo $\Phi \circ \gamma$ come param. di ∂S
- Trasformo tutto in Ω e $\partial\Omega$ e quello che otteengo è il teo. della div.

Achtung! Quando scriviamo ∂S e $\partial \Omega$ sono due cose completamente diverse

→ $\partial \Omega$ è il "bordo topologico", definito come l'insieme dei punti x tale che $B(x, r)$ interseca sia Ω sia il suo complementare, per ogni $r > 0$.

Secondo questa definizione, una sup. è tutto bordo

→ ∂S va pensato per ora "intuitivamente".

— o — o —