

Esercizio 1 Sia $\gamma: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ la curva $\gamma(t) = (t+t^3, t+t^4)$
 Sia Ω il dominio limitato dal sostegno di γ e dalla retta $y=x$.
 Calcolare

$$\iint_{\Omega} xy \, dx \, dy$$

ROAD MAP: $\rightarrow$ capire il sostegno di γ
 $\rightarrow$ capire Ω
 $\rightarrow$ capire come organizzare $\iint_{\Omega}$.

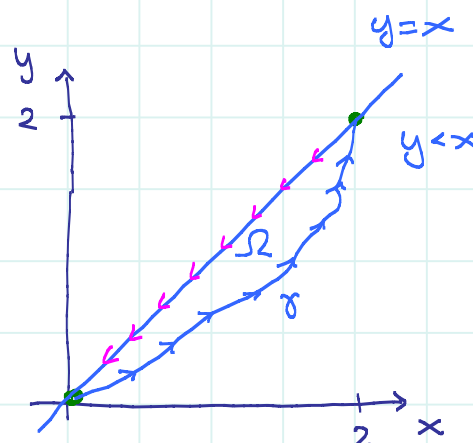
1° passo γ è semplice (entrambe componenti sono monotone)
 e va da $(0,0)$ a $(2,2)$ con $x(t)$ e $y(t) \nearrow$

2° passo Decidere la posizione relativa
 della retta e del sostegno

Claim: sta sotto, cioè $y(t) \leq x(t)$
 con uguaglianza solo agli estremi

$$y(t) \leq x(t) \Leftrightarrow$$

$$\cancel{t} + t^4 \leq \cancel{t} + t^3 \Leftrightarrow \underset{+}{t^3} (\underset{-}{t-1}) \leq 0 \quad \because$$



3° passo Se potessi scrivere la curva come $y = \varphi(x)$ procederei poi
 con Ω insieme normale asse x

$$t+t^3, t+t^4$$

"
 $x \nearrow$ vorrei ricavare t in funzione di x
 ma non sono capace $\because$

4° passo Provo ad usare il teo. della divergenza

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} x y \, dx \, dy &= \iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy & E(x, y) &= \left(\frac{1}{2} x^2 y, 0 \right) \\ &= \int_{\partial \Omega} A \, dy - B \, dx \\ &= \int_{\partial \Omega} \frac{1}{2} x^2 y \, dy\end{aligned}$$

Ora $\partial \Omega$ ha due parti

→ γ data con il verso giusto

→ $\gamma_1(t) = (t, t)$ con $t \in [0, 2]$ con verso invertito

$$\begin{aligned}&= \int_{\gamma \text{ data}} \frac{1}{2} x^2 y \, dy - \int_{\gamma_1} \frac{1}{2} x^2 y \, dy \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} (\underbrace{t+t^3}_x)^2 (\underbrace{t+t^4}_y) (\underbrace{1+4t^3}_{\dot{y}}) dt - \frac{1}{2} \int_0^2 \underbrace{t^3}_{x^2 y} \cdot \underbrace{1}_{\dot{y}} dt\end{aligned}$$

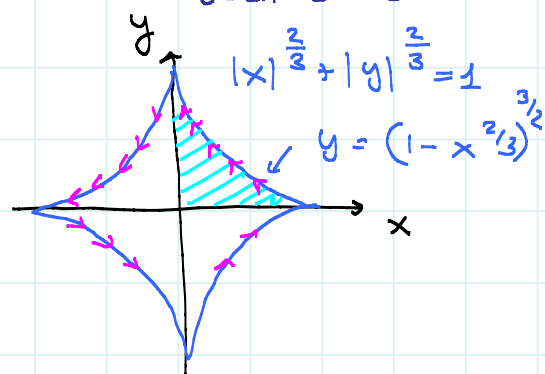
Esercizio 2 $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$ con $t \in [0, 2\pi]$

Allora γ è chiusa e semplice. Determinare l'area del dominio che limita.

Chiusura banale. Semplicità. Analizziamo col sistema

$$\begin{cases} \cos^3 t = \cos^3 s \\ \sin^3 t = \sin^3 s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos t = \cos s \\ \sin t = \sin s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} t=s \\ \text{oppure} \end{matrix} \begin{matrix} t=0 & s=2\pi \\ t=2\pi & s=0 \end{matrix} \quad \circ$$

Osservo che $|x(t)|^{\frac{2}{3}} + |y(t)|^{\frac{2}{3}} = 1$



1° modo

$$\text{Area}(\Omega) = 4 \int_0^1 (1 - x^{2/3})^{3/2} dx = \int_{x=\sin^3 t} \quad (\text{con il seno di poi})$$

2° modo Uso teo. div.

$$\begin{aligned}\text{Area}(\Omega) &= \int_0^{2\pi} x \, dy && \text{se gira nel verso giusto (e lo fa)} \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^3 t \cdot 3 \sin^2 t \cos t \, dt \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cdot \cos^4 t \, dt = 0\end{aligned}$$

In alternativa $\text{Area}(\Omega) = - \int_0^{2\pi} y \, dx$

$$\begin{aligned}&= - \int_0^{2\pi} \sin^3 t \cdot 3 \cos^2 t (-\sin t) \, dt \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \sin^4 t \cos^2 t \, dt = 0\end{aligned}$$

Ma facendo $\frac{1}{2} \cdot 1^0 + \frac{1}{2} \cdot 2^0$ trovo

$$\begin{aligned}\text{Area}(\Omega) &= \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \sin^4 t \cos^2 t + \sin^2 t \cos^4 t \, dt \\ &= \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t \, dt \\ &= \frac{3}{8} \int_0^{4\pi} \sin^2(2t) \, dt && 2t = z \quad dt = \frac{1}{2} dz \\ &= \frac{3}{8} \int_0^{4\pi} \sin^2(z) \cdot \frac{1}{2} \, dz \\ &= \frac{3}{16} \cdot 2\pi = \frac{3}{8} \pi \quad \ddot{\smile}\end{aligned}$$

Esempio 3 Consideriamo la superficie $z = 2 - x^2 - 4y^2$ con $z \geq 0$ orientata con il vettore normale che punta verso il basso.

Calcolare

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma \quad \text{con } E = (xy, -y, 2z + x^2)$$

1° modo parametrizzo e uso formula

$$\Phi(u, v) = (u, v, 2 - u^2 - 4v^2) \quad \text{con } (u, v) \in \Omega \text{ e}$$

$$\Omega = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + 4v^2 \leq 2\} = \text{ellisse}$$

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \pm \iint_{\Omega} A M_1 + B M_2 + C M_3 \, du dv$$

dipende se (M_1, M_2, M_3) induce
l'orientazione giusta

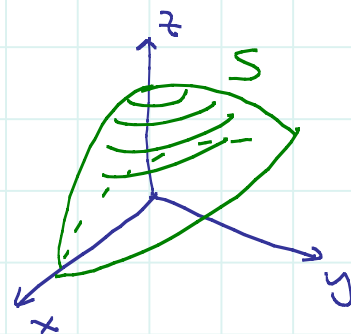
$$\begin{array}{ccc} * & * & * \\ 1 & 0 & -2u \\ 0 & 1 & -8v \end{array}$$

$$\leadsto (M_1, M_2, M_3) = (\dots, \dots, 1)$$

↑
punta verso
l'alto, quindi bisogna
mettere segno -.

Non resta che sostituire A, B, C, M_1, M_2, M_3 tutto in funzione di u e v .

2° modo Aggiungo la base e faccio
teo. della div



$$\begin{aligned} \iiint_V \operatorname{div} E \, dx dy dz &= - \int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma \\ &+ \int_{\text{Base}} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma \end{aligned}$$

↑
 $(0, 0, -1)$

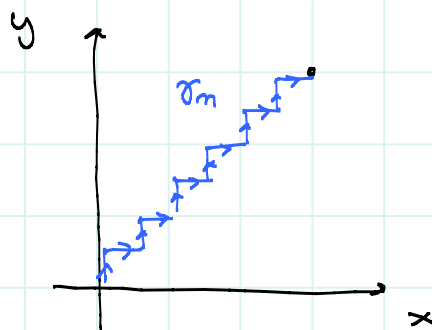
$$\iiint_V \operatorname{div} E = \iiint_V (y+1) \, dx dy dz = \text{Volume}(V) = \text{banale int. triplo}$$

$$\int_{\text{Base}} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \iint_{\Omega} (-2z - x^2) \, dx dy = - \iint_{x^2 + 4y^2 \leq 2} x^2 \, dx dy = \text{si fa.}$$

↑
= 0 sulla base

Esercizio della scaletta

γ_n = curva da $(0,0)$ a $(1,1)$
con gradienti di $\frac{1}{n}$



Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_n} f(x,y) ds$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_n} A(x,y) dx + B(x,y) dy$$

— 0 — 0 —