

Teorema della divergenza

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} \, dx = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma$$

In dimensione 2, se $\vec{E} = (A, B)$ allora

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} \, dx = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds = \int_{\gamma} A \, dy - B \, dx$$

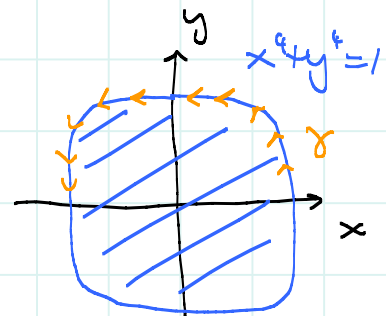
perché $\partial\Omega$ lascia Ω a sx

Utilizzo: di volta in volta scegliamo cosa è più comodo calcolare

Esempio 1 $\Omega = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 \leq 1 \}$
 $\vec{E}(x, y) = (x^4 y^6, y^8)$

Voglio calcolare

$$\int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds$$



1° modo Parametrizzo $\partial\Omega$, calcolo $\vec{n}$ e uso la formula

2° modo $\int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds = \int_{\gamma} A(x, y) \, dy - B(x, y) \, dx$

così mi risparmio la normale

Come parametrizzo $\partial\Omega$?

$\gamma(t) = (\sqrt{\cos t}, \sqrt{\sin t})$ con $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ e analogo negli altri quadranti

$\gamma(t) = (t, \pm \sqrt{1-t^4})$ con $t \in [-1, 1]$, poi aggiunto i versi

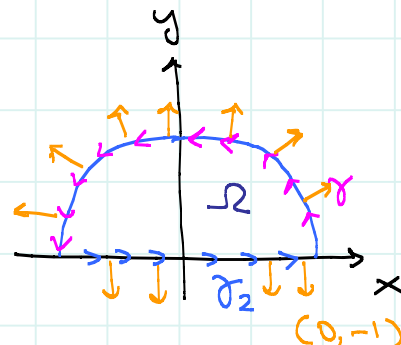
3° modo Uso teo. divergenza

$$\int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds = \iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} dx dy = \iint_{\Omega} (4x^3y^6 + y^7) dx dy$$
$$= 0 \text{ per simmetria} \quad \ddot{\smile}$$

Esempio 2 Ω = quello di prima con $y \geq 0$

Calcolare $\int_{\gamma} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds$

$$\vec{E}(x, y) = (x^4y^6, x^8)$$



Ora il flusso non è calcolato su un bordo.

Però... basta aggiungere il pezzo sotto

Teo. div. $\Rightarrow$

$$\int_{\gamma} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds + \int_{\gamma_2} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds = \iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} dx dy$$

"

$$\iint_{\Omega} (4x^3y^6) dx dy$$

"

0

Quindi

$$\int_{\gamma} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds = - \int_{\gamma_2} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds$$

$\uparrow$
(0, -1)

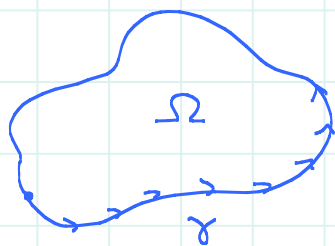
$$\gamma_2(t) := (t, 0)$$

con $t \in [-1, 1]$

$$= \int_{\gamma_2} x^8 ds$$

$$= \int_{-1}^1 t^8 \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{speed}}}{1} dt$$

AREA DI UN DOMINIO LIMITATO DA UNA CURVA DATA



Sia γ una curva chiusa e semplice
che percorre nel verso giusto il $\partial\Omega$
Allora

$$\text{Area}(\Omega) = \int_{\gamma} x dy = - \int_{\gamma} y dx$$

Per combinazione ci sono anche tutte le formule del tipo

$$\text{Area}(\Omega) = \int_{\gamma} \lambda x dy - (1-\lambda) y dx$$

Con $\lambda = \frac{1}{2}$ diventa

$$\text{Area}(\Omega) = \frac{1}{2} \int_{\gamma} x dy - y dx$$

Dim Considero il campo $E(x,y) = (x, 0)$ e applico teo. div.

$$\iint_{\Omega} \text{div } E \, dx dy = \int_{\gamma} x dy$$

" ↑ $A dy - B dx$

$$\iint_{\Omega} 1 \, dx dy$$

" "

Area

Se invece scelgo $E(x,y) = (0, y)$ ritrovo

$$\text{Area}(\Omega) = \iint_{\Omega} 1 \, dx dy = \iint_{\Omega} \text{div } E \, dx dy = \int_{\gamma} -y dx$$

" ↑ $A dy - B dx$

Esempio 3 Area del cerchio con fo. div.

$$x^2 + y^2 \leq 1$$

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$$

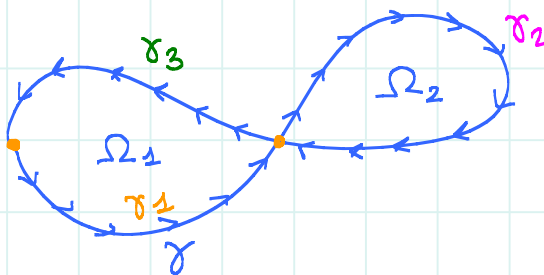
$$\text{Area}(\Omega) = \int_{\gamma} x \, dy = \int_0^{2\pi} \underset{\uparrow x}{\cos t} \cdot \underset{\uparrow y}{\cos t} \, dt = \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt = \pi$$

Alternativa: potevo usare la curva $\gamma(t) = (\sin t, \cos t) \quad t \in [0, 2\pi]$

$$\text{Area}(\Omega) = \int_{\gamma} x \, dy = \int_0^{2\pi} \sin t (-\sin t) \, dt = -\pi$$

no: la curva γ percorre la circ.
in verso opposto a quello che
serve, quindi occorre mettere
un segno -.

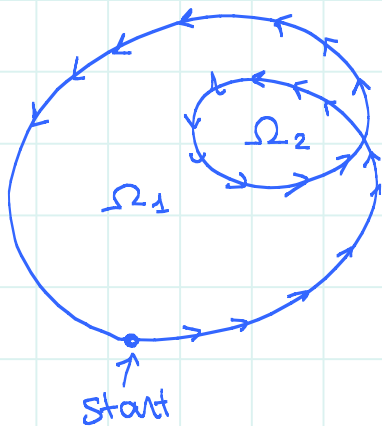
Oss.



$$\int_{\gamma} x \, dy =$$

$$= \text{Area}(\Omega_1) - \text{Area}(\Omega_2)$$

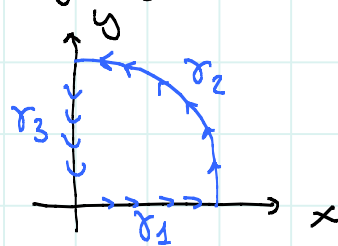
$$\int_{\gamma} = \underbrace{\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_3}}_{\text{Area}(\Omega_1)} + \underbrace{\int_{\gamma_2}}_{-\text{Area}(\Omega_2)}$$



$$\int_{\gamma} x \, dy = \text{Area}(\Omega_1) + 2 \text{Area}(\Omega_2)$$

Esempio 4 $\Omega = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0 \}$

$$\int_{\sigma_1} x \, dy + \int_{\sigma_2} x \, dy + \int_{\sigma_3} x \, dy$$



$$\sigma_2(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$\sigma_1(t) = (t, 0) \quad t \in [0, 1]$$

$$\sigma_3(t) = (0, t) \quad t \in [0, 1] \quad \text{ma poi devo mettere il segno -}$$

$$\int_{\sigma_1} x \, dy = \int_0^1 \underset{\uparrow x}{t} \underset{\uparrow \dot{y}}{0} \, dt = 0$$

$$\int_{\sigma_2} x \, dy = \dots = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, dt = \frac{\pi}{4}$$

$$-\int_{\sigma_3} x \, dy = -\int_0^1 \underset{\uparrow x}{0} \cdot \underset{\uparrow \dot{y}}{1} \, dt = 0$$

Allo stesso modo, se voglio

$$\iint_{\Omega} \underset{\uparrow \text{div } E}{x} \, dx \, dy = \int_{\sigma} \underset{\uparrow A \, dy - B \, dx}{\frac{x^2}{2}} \, dy$$

Solito teorema con $\vec{E} = (\frac{x^2}{2}, 0)$

$$\iint_{\Omega} x \, dx \, dy = - \int_{\sigma} x y \, dx \quad E = (0, x y)$$

— 0 — 0 —