

Tipi di insiemi in $\mathbb{R}^2$, ma vale più in generale

Un insieme $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice

- **CONNESSO** se è fatto da un pezzo solo
- **CONNESSO PER ARCHI** se per ogni coppia di p.ti $P, Q \in \Omega$ esiste una curva continua t.c. $\gamma(a) = P$ e $\gamma(b) = Q$
- **CONVESSO** se per ogni coppia di p.ti $P, Q \in \Omega$ tutto il segmento PQ sta in Ω
- **STELLATO** se esiste $P \in \Omega$ t.c. per ogni $Q \in \Omega$ si ha che il segmento PQ sta tutto in Ω

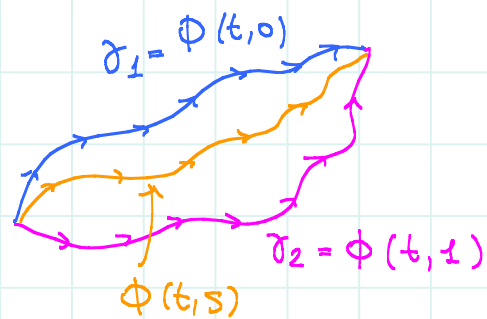
(è possibile mettere un gnomoliano in P e quello vede tutto Ω)

- **SEMPLICEMENTE CONNESSO** se non ha "buchi"
detto un po' meglio, occorre introdurre il concetto di OMOTOPIA.

Def. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ e siano $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \rightarrow \Omega$ curve continue con gli stessi estremi. Una omotopia tra γ_1 e γ_2 è una funzione $\Phi : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$ continua t.c.

$$\begin{aligned} \Phi(t, 0) &= \gamma_1(t) & \forall t \in [a, b] \\ \Phi(t, 1) &= \gamma_2(t) & \forall t \in [a, b] \\ \Phi(a, s) &= \gamma_1(a) = \gamma_2(a) & \Phi(b, s) = \gamma_1(b) = \gamma_2(b) & \forall s \in [0, 1] \end{aligned}$$

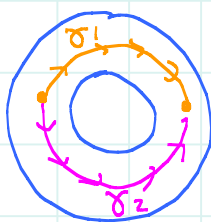
Quando s varia in $[0,1]$ posso pensare $\phi(t,s)$ come una famiglia di curve che congiunge $\gamma_1(t)$ a $\gamma_2(t)$.



Teorema misterioso I seguenti fatti sono equivalenti per $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$

- (i) Ogni coppia di curve con gli stessi estremi sono omotope
- (ii) Ogni curva chiusa è omotopa ad una curva costante
- (iii) Ogni funzione continua da una circonferenza a valori in Ω si estende ad una funzione continua definita su tutto il cerchio.

Def. Se vale una qualunque delle 3, Ω si dice semplicemente connesso.



Esempio distruttivo

$\mathbb{R}^3$ meno una sfera è semplicemente connesso.

$\mathbb{R}^3$ meno una retta NON è semplicemente connesso

Relazioni ovvie

CONVESSO $\Rightarrow$ STELLATO $\Rightarrow$ SEMPL. CONNESSO $\Rightarrow$ CONNESSO

tutte quelle al contrario sono false

Back to forme diff.

ESATTA $\Rightarrow$ CHIUSA

CHIUSA $\Rightarrow$ ESATTA ? In generale NO, ma SI se Ω è semplicemente connesso (se è stellato o connesso, meglio ancora)

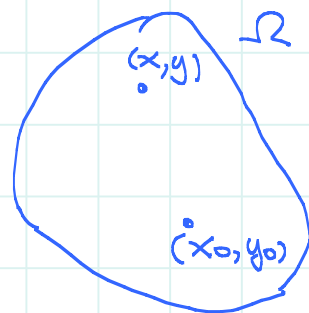
Teorema (versione LIGHT)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ stellato, e sia ω una forma diff. chiusa in Ω .

Allora ω è esatta in Ω .

Dim Sia (x_0, y_0) il pto in cui sta il guardiano.

Per ogni $(x, y) \in \Omega$ pongo



$$V(x, y) = \int_{\gamma} \omega$$

↑ segmento congiungente

$$\gamma(t) := (x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0))$$

Azi, per semplicità tradiamo tutto e supponiamo che $(x_0, y_0) = (0, 0)$ quindi

$$\gamma(t) = (tx, ty) \quad \text{con } t \in [0, 1]$$

e quindi

$$V(x, y) = \int_0^1 \left\{ \underbrace{A(tx, ty)}_{A(\gamma(t))} \underbrace{x}_{\dot{\gamma}_1(t)} + \underbrace{B(tx, ty)}_{B(\gamma(t))} \underbrace{y}_{\dot{\gamma}_2(t)} \right\} dt$$

Spero che $V_x(x, y) = A(x, y)$ e $V_y(x, y) = B(x, y)$

Per calcolare le derivate uso gli integrali dip. da parametro

$$V_x(x, y) = \int_0^1 \left\{ \underbrace{A_x(tx, ty)tx + A(tx, ty) \cdot 1}_{\text{derivata di } A(tx, ty)x \text{ rispetto a } x} + \underbrace{B_x(tx, ty)ty}_{\text{derivata di } B(tx, ty) \text{ risp. a } x} \right\} dt$$

$$\stackrel{\text{uso}}{\uparrow} = \int_0^1 \{ A_x(tx, ty)tx + A(tx, ty) + A_y(tx, ty)ty \} dt$$

$$B_x = A_y$$

= niente panico ... è una derivata

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \frac{d}{dt} [t A(tx, ty)] \\
&= [t A(tx, ty)]_{t=0}^{t=1} \\
&= A(x, y)
\end{aligned}$$

Per l'altra variabile è uguale
— o — o —

Esercizio utile Rifare la dimostrazione con d generico

Per il caso generale del sempl. connesso, vale questo teorema

Teorema misterioso Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ (aperto e basta).

Siano γ_1 e γ_2 curve di classe C^1 a valori in Ω .

Supponiamo che γ_1 e γ_2 abbiano gli stessi estremi e siano omotope.

Sia ω una forma diff. chiusa in Ω .

Allora

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

(In breve: l'integrale di forme chiuse su curve omotope è lo stesso)

Oss. Se Ω è pure sempl. connesso, allora γ_1 e γ_2 con estremi coincidenti sono sempre omotope, quindi l'integrale è lo stesso, quindi vale una caratterizzazione dell'esattezza.

— o —