

INTEGRALI CURVILINEI

(Integrali di funzioni lungo curve)
(Integrazione NON ORIENTATA)

- ① Notazioni
- ② Interpretazione geometrica
- ③ Idea della definizione
- ④ Formula il calcolo

① Setting: $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$

$$f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$$

$\uparrow$
o comunque almeno definita sul supporto di γ

$$\int_{\gamma} f(x) ds$$

$\uparrow$
insieme di
integrazione

$\uparrow$
integrandi

$\leftarrow$ sta ad indicare che si tratta di
un integrale
curvilineo

③ Idea della definizione: Da solita con somme inferiori / superiori

Prendiamo una partizione $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$ e
consideriamo la somma

$$\sum_{i=1}^n \underbrace{\text{Lunghezza}(t_{i-1}, t_i)}_{\substack{\text{lunghezza del tratto} \\ \text{di curva per} \\ t \in [t_{i-1}, t_i]}} M_i$$

$\uparrow$ costante $\geq f(\gamma(t)) \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i]$

$$\sum_{i=1}^n \text{Lunghezza}(t_{i-1}, t_i) m_i$$

$\uparrow$ costante $\leq f(\gamma(t)) \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i]$

Poi faccio l'integrale superiore come iuf delle prime
" inferiore " sup delle seconde
Se coincidono, sono contento.

2) Interpretazione geometrica

Consideriamo la funzione

$$[a, b] \ni t \rightarrow f(\gamma(t)) \in \mathbb{R}$$

↑ quota a cui si trova l'ovino
al tempo t

L'integrale curvilineo **NON** ha a che fare con questa

$[0, \text{lung}(\gamma)] \ni s \rightarrow$ quota a cui si trova l'ovino
dopo aver percorso un tratto
lungo s .

L'integrale curvilineo è l'integrale di questa
[Disegnavi e discorsi nel video]

Ad esempio, se $f(x) \equiv 1$, allora

$$\int_{\gamma} 1 \, ds = \text{lung}(\gamma)$$

Integrazione NON ORIENTATA:

→ se faccio avanti / indietro (anche in modo diverso)

l'integrale raddoppia

→ se percorro la curva al contrario, l'integrale resta lo stesso,

→ tratti percorsi più volte, pagano più volte.

[4] Formula per il calcolo

Se tutto è decente, diciamo f continua e curva C^1 , allora

$$\int_{\gamma} f(x) ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \underbrace{\|\dot{\gamma}(t)\|}_{\text{speed}} dt$$

Se $d = 2$, allora $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, allora

$$\int_{\gamma} f(x) ds = \int_a^b f(\underbrace{(x(t), y(t))}_{\text{vettore di } \mathbb{R}^2}) \underbrace{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}}_{ds} dt$$

ds = spazio = speed · dt tempo

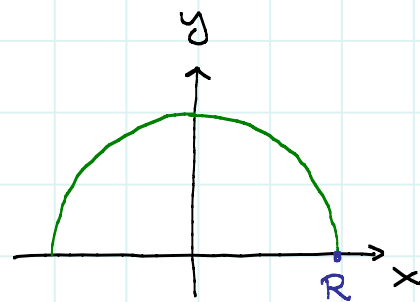
(La dimostrazione è del tutto analoga alla length della curva)

Baricentro di una curva nel piano : $G = (x_G, y_G)$ dove

$$x_G := \frac{1}{\text{length}(\gamma)} \int_{\gamma} x ds$$

$$y_G := \frac{1}{\text{length}(\gamma)} \int_{\gamma} y ds$$

Esempio Baricentro di una semicirconferenza
(solo la curva)



È ovvio che $x_G = 0$ per simmetria

Parametizzo

$$(R \cos t, R \sin t) \quad t \in [0, \pi]$$

$$\int_{\gamma} y ds = \int_0^{\pi} \underbrace{R \sin t}_y \sqrt{\underbrace{R^2 \sin^2 t}_{\dot{x}(t)^2} + \underbrace{R^2 \cos^2 t}_{\dot{y}(t)^2}} dt$$

$$= R^2 \int_0^{\pi} \sin t dt = 2R^2 \rightsquigarrow y_G = \frac{2R^2}{\underbrace{\pi R}_{\text{length}}} = \boxed{\frac{2}{\pi} R}$$

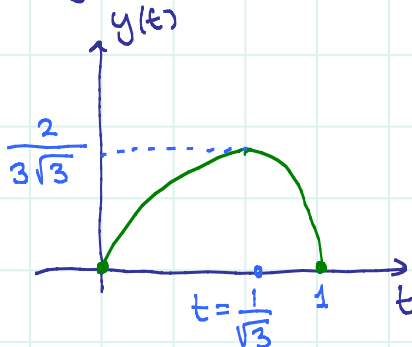
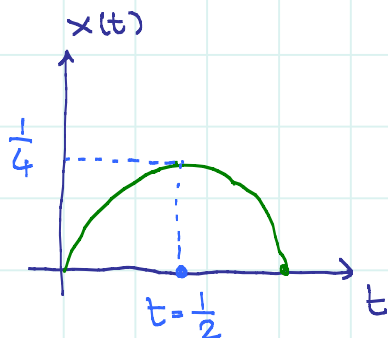
Esempi di disegno di un sostegno

$$\gamma(t) = (\underbrace{t-t^2}_{x(t)}, \underbrace{t-t^3}_{y(t)}) \quad t \in [0, 1]$$

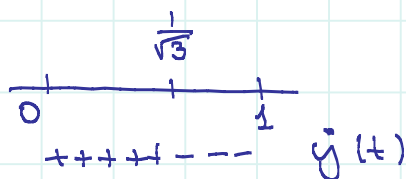
Studiata in lezione passata. Veriva chiusa e semplice.

Come è fatto il sostegno.

Studio separatamente $x(t)$ e $y(t)$ per $t \in [0, 1]$



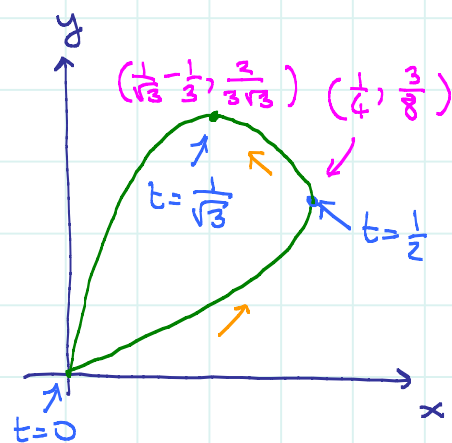
$$\dot{y}(t) = 1 - 3t^2$$



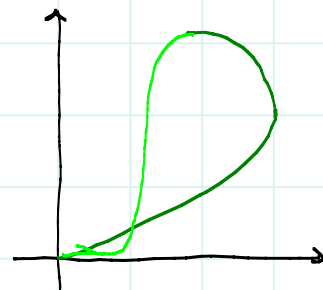
$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} \\ = \frac{2}{3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Ora studio $(x(t), y(t))$ nel piano x, y

- Quando $t \in [0, \frac{1}{2}]$ abbiamo che $x(t) \nearrow$ e $y(t) \nearrow$
- Quando $t \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ abbiamo che $x(t) \searrow$ e $y(t) \nearrow$
- Quando $t \in [\frac{1}{\sqrt{3}}, 1]$ abbiamo che $x(t) \searrow$ e $y(t) \searrow$



Achtung! Queste sole info non bastavano a dedurre la semplicità



Fino a $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ci salva la monotonia di $y(t)$, ma poi il ritorno potrebbe essere fatto male

Oss. In questo caso Ω insieme limitato dalla curva è normale rispetto ai 2 assi, ma scriverlo non è banale

$$\begin{matrix} (t-t^2, t-t^3) \\ x \quad y \end{matrix}$$

$x = t - t^2$ no ricavot, prendendo il t più piccolo

$$t^2 - t + x = 0$$

$$t_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x^2}}{2} \quad t_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4x^2}}{2}$$

Ora Ω insieme è

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, t_1 - t_1^3 \leq y \leq t_2 - t_2^3\}$$

— o — o —