

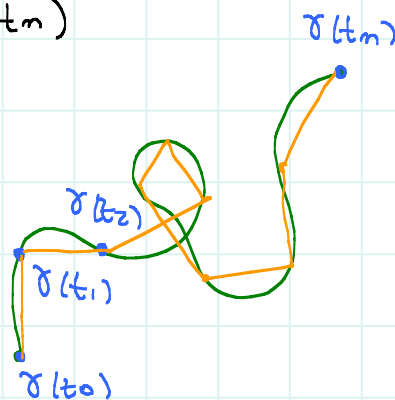
LUNGHEZZA DI UNA CURVA

Setting: sia $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ una curva (anche orribile, anche non continua)

Fissata una partizione $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m = b$, consideriamo la poligonale che ha estremi $\gamma(t_0), \gamma(t_1), \dots, \gamma(t_m)$

La lunghez. della poligonale è data da

$$\sum_{i=1}^m \underbrace{\|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|}_{\text{lunghez. del segmento}}$$



Idea intuitiva: lunghez. poligonale $\leq$ lunghez. curva e quando rendo la partizione + fitta sto approx. la lunghez. della curva

Def (lunghez. di una curva) Setting come sopra, Allora

$$\text{Lunghez}(\gamma) := \sup \left\{ \sum_{i=1}^m \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| : a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b \right\}$$

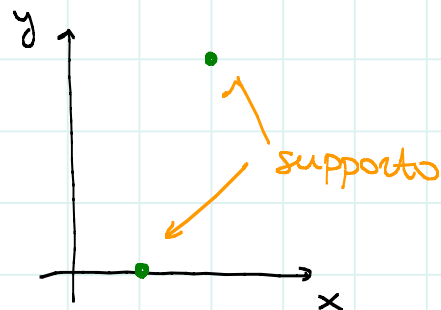
il sup è fatto al variare di tutte le possibili partizioni di $[a, b]$

Il sup può venire $+\infty$. Se viene un numero (ovviamente ≥ 0) diciamo che la curva ha lunghez. oppure (sinonimo) che la curva è RETTIFICABILE

Esempio 1 $\gamma: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da

$$\gamma(t) = \begin{cases} (1, 0) & \text{se } t \in [0, 1] \\ (2, 3) & \text{se } t \in (1, 2] \end{cases}$$

teletrasporto



$\text{Lunghe}(\gamma) = \sqrt{10}$ = distanza tra i 2 p.ti (ogni poligonale contiene il segmento che congiunge i 2 p.ti)

Esempio 2 Se una curva percorre più volte un certo tratto del sostegno, quel tratto conta + volte ai fini della lunghezza.

Esempio 3 (Curva di lunghe. infinita fatta apposta)

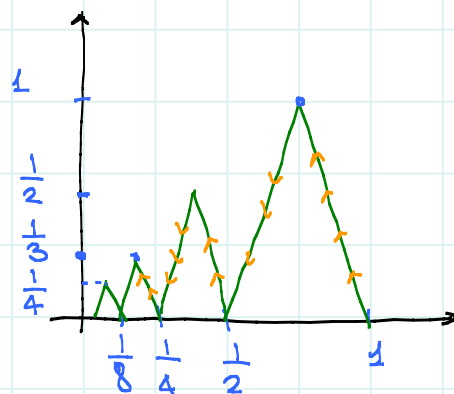
Consideriamo la curva descritta in figura

$\text{Lunghe} \geq \text{somma Lunghe. lati}$

↑
basta scegliere gli istanti della partizione come quelli in cui è agevole ottenere dei segmenti

$$\geq 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = +\infty$$

↑
stiamo ogni dato con l'altezza



Esempio 4 (Come sopra, ma meno burocratico)

$$\gamma(t) = (t, t \sin^2 \frac{1}{t})$$

$t \in [0, 1]$

Il sostegno è il grafico di

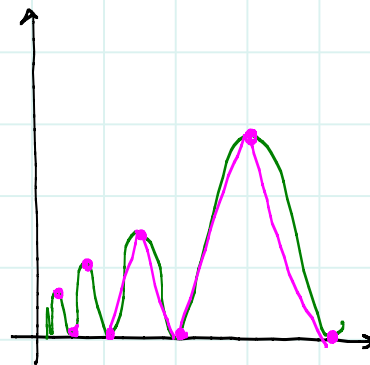
$$y = x \sin^2 \frac{1}{x}$$

(funzione continua in $[0, 1]$)

Nel costruire la poligonale
consideriamo i t per cui

$$\sin^2 \frac{1}{t} = 0 \leadsto \frac{1}{t} = k\pi \leadsto t = \frac{1}{k\pi}$$

e i t per cui $\sin^2 \frac{1}{t} = 1 \leadsto \frac{1}{t} = \frac{\pi}{2} + k\pi$



$$\leadsto t = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi} \quad \text{In questi punti } f(t) = t$$

Se stimo la poligonale con i lati, ed i lati con le altezze ottengo

$$2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{\pi}{2} + i\pi} = +\infty$$

— 0 — 0 —

FORMULA PER IL CASO C^1

Teorema Sia $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ una curva di classe C^1
Allora

$$\text{lunghe}(\gamma) := \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

SPAZIO = SPEED INTEGRATA
rispetto a t .

Casi speciali

$$d=2 \quad \text{lunghe}(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt$$

$$d=3 \quad \quad \quad = \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} dt$$

Grafico di una funzione nel piano

$$\gamma(t) = (t, f(t))$$

perché il grafico
di $y = f(x)$

$$\text{lunghe}(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt$$

Curva nel piano data in coord. polari $\rho(t), \theta(t)$ $t \in [a, b]$

$$x(t) = \rho(t) \cos \theta(t)$$

$$\dot{x}(t) = \dot{\rho}(t) \cos \theta(t) - \rho(t) \dot{\theta}(t) \sin \theta(t)$$

$$y(t) = \rho(t) \sin \theta(t)$$

$$\dot{y}(t) = \dot{\rho}(t) \sin \theta(t) + \rho(t) \dot{\theta}(t) \cos \theta(t)$$

$$\text{Speed} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2}$$

↑
i doppi prodotti se
ne vanno

$$\text{Length}(\sigma) = \int_a^b \sqrt{\rho'(t)^2 + \rho(t)^2 \theta'(t)^2}$$

↑
a parità di θ' , il contributo alla
speed varia in funzione di ρ

— o — o —

Se due curve hanno lo stesso sostegno, in generale possono avere
length. diverse MA se il sostegno viene percorso "allo stesso modo"
la length. viene la stessa.

Riparametrizzazione di una curva

Sia $\sigma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ una curva. Sia $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$
una funzione monotona con $\varphi(c) = a$, $\varphi(d) = b$.

Supponiamo tutto di classe C^1 .

Consideriamo

$$\hat{\sigma}(t) := \sigma(\varphi(t)) \quad t \in [c, d]$$

Moralmente: $\hat{\sigma}$ è la "stessa curva" percorsa in modo diverso

Allora $\text{Length}(\sigma) = \text{Length}(\hat{\sigma})$

Facciamo il conto in $\mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = (x(t), y(t))$$

$$\hat{\gamma}(t) = (x(\varphi(t)), y(\varphi(t))) = (\hat{x}(t), \hat{y}(t))$$

$$\hat{x}'(t) = x'(\varphi(t)) \varphi'(t)$$

$$\hat{y}'(t) = y'(\varphi(t)) \varphi'(t)$$

Ma allora $\|\hat{\gamma}'(t)\| = \sqrt{\hat{x}'(t)^2 + \hat{y}'(t)^2}$

$$= \underbrace{\varphi'(t)}_{\varphi \text{ era crescente}} \sqrt{x'(\varphi(t))^2 + y'(\varphi(t))^2}$$

Ma allora

$$\begin{aligned} \text{lung}(\hat{\gamma}) &= \int_c^d \|\hat{\gamma}'(t)\| dt = \int_c^d \|\gamma'(\varphi(t))\| \varphi'(t) dt \\ &= \int_a^b \|\gamma'(s)\| ds \\ &\quad \begin{array}{l} \uparrow \\ s = \varphi(t) \\ ds = \varphi'(t) dt \end{array} \\ &= \text{lung}(\gamma). \end{aligned}$$

Oss. Funziona anche se φ è monotona decrescente
— o —