

- 3^a parte programma:
- Curve e integrali curvilinei
 - Forme diff. e campi di vettori
 - Superfici e integrali sup.
 - Teo. della divergenza (Gauss-Green)
 - Teo. del rotore (STOKES)

CURVE

Una curva a valori in $\mathbb{R}^d$ è una funzione

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{o addirittura un insieme} \\ \text{qualsiasi} \end{array}$$

↑ contenuto nella retta

$$\gamma(t) \quad \begin{array}{l} \text{=} \text{posizione occupata da un omio al tempo } t \\ \uparrow \text{tempo} \end{array}$$

$$d=2 \quad \gamma(t) = (x(t), y(t))$$

$$d=3 \quad \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

Def. Una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ si dice

- CHIUSA se $\gamma(a) = \gamma(b)$ (partenza = arrivo)
- SEMPLICE se è iniettiva, tranne al più agli estremi, cioè

$$\gamma(t) = \gamma(s) \Rightarrow t = s \quad \text{oppure} \quad \{t, s\} = \{a, b\}$$

Si definisce SOSTEGNO DELLA CURVA l'immagine della γ , cioè

$$\text{Sostegno} = \{ \gamma(t) \in \mathbb{R}^d : t \in [a, b] \}$$

Achtung! È importante distinguere una curva dal suo sostegno.
Lo stesso sostegno può essere percorso in modo diverso.

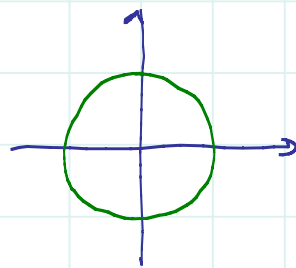
- Sostegno = "foto" = insieme dei p.ti in cui è passata la curva
- curva = "video" = come l'omio ha percorso il sostegno

Esempio 1

$$\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t) : t \in [0, 2\pi]$$

$$\gamma_2(t) = (\cos 2t, \sin 2t) : t \in [0, 4\pi]$$

$$\gamma_3(t) = (\sin t, \cos t) : t \in [0, 2\pi]$$



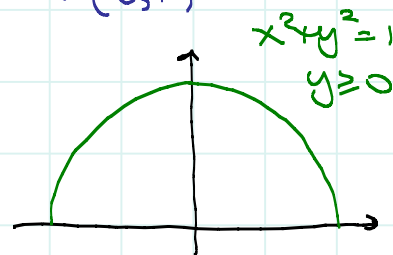
Il sostegno è sempre $x^2 + y^2 = 1$ (tutta la circ.)

→ $\gamma_1(t)$ fa un giro (chiusa e semplice)

→ $\gamma_2(t)$ fa due giri (chiusa ma NON semplice)

→ $\gamma_3(t)$ fa un giro in senso orario partendo da (0,1)

Esempio 2 Trovare curve con quel sostegno



$$\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t) : t \in [0, \pi]$$

$$\gamma_2(t) = (t, \sqrt{1-t^2}) : t \in [-1, 1]$$

$$\gamma_3(t) = (-t, \sqrt{1-t^2}) : t \in [-1, 1] \quad (\text{stesso verso di percorrenza di } \gamma_1(t), \text{ ma con velocità diversa})$$

Def. Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva di classe C^1 (le singole componenti sono derivabili con derivata continua).

Si definisce

→ **VELOCITY** il vettore $\dot{\gamma}(t)$

→ **SPEED** il numero $\|\dot{\gamma}(t)\|$

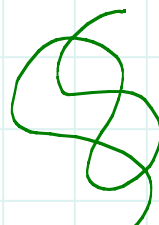
→ **RETTA TANGENTE** nel p.to corrispondente ad un certo t_0
la retta di eq. parametrica

$$\gamma(t_0) + s \dot{\gamma}(t_0)$$

↑
parametro

retta che passa per $\gamma(t_0)$ con
direzione data da $\dot{\gamma}(t_0)$
Ha senso se $\dot{\gamma}(t_0) \neq 0$

Achtung! La curva, se non è semplice, può passare più volte dallo stesso p.to con diverse rette tangenti



banale (sostituisco gli estremi)

Imparare a fare:

- stabilire se una curva è chiusa e/o semplice
- calcolare rette tangenti * uso formula
- disegnare il sostegno

Strategie per dimostrare la semplicità

① Sperare che una componente sia strett. monotona

$$\gamma_1(t) = (t^2 + \sin(2t), \cos t, \arctan t - t^3) \quad t \in [0, \pi]$$

↑↑
è strett. decrescente ☺

$$\gamma_2(t) = (t^2, t - t^2, t - t^3) \quad t \in [0, 4]$$

↑↑
crescente per $t \in [0, 4]$

$$\gamma_3(t) = (t^2, \cos t) \quad t \in [-1, 1]$$

↑ ↑
due funzioni PARI, quindi
 $\gamma_3(\frac{1}{2}) = \gamma_3(-\frac{1}{2}) \Rightarrow$ NO SEMPLICE

② Sperare che ci sia un "invariante" monotono

$$\gamma(t) = (t + 2\sin t, t + 10\sin t) \quad t \in [0, 10\pi]$$

↑ ↑
NO MONOTONE

Ma $y(t) - 5x(t) = -4t \leftarrow$ questo è monotono

Se ci fossero $t_1 \neq t_2$ t.c. $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$, allora

$$\begin{array}{ccc} y(t_1) - 5x(t_1) & = & y(t_2) - 5x(t_2) \\ \text{"} & & \text{"} \\ -4t_1 & & -4t_2 \end{array} \quad \leadsto \quad t_1 = t_2$$

$$\gamma(t) = (t \sin t, t \cos t) \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\dots \quad x(t)^2 + y(t)^2 = t^2 \quad \text{è monotono} \Rightarrow \text{SEMPLICE} \quad \text{☺}$$

Oss. Una curva chiusa per forza fallisce ① e ②.

③ Spertone in tratti che stanno in zone diverse

$$(cost, sint) : t \in [0, 2\pi]$$

Considero $t \in [0, \pi]$ e $t \in [\pi, 2\pi]$

→ Per $t \in [0, \pi]$ la curva è iniettiva perché cost è monotona e la curva sta nel semipiano $y > 0$ (tranne agli estremi)

→ Per $t \in [\pi, 2\pi]$ la curva è iniettiva perché cost è di nuovo monotona e la curva sta nel semipiano $y < 0$ (tranne estremi)

Quindi se esistono $t_1 \neq t_2$ con $\delta(t_1) = \delta(t_2)$ questi

- non possono essere entrambi in $[0, \pi]$ ↗ è iniettiva
- " " " " in $[\pi, 2\pi]$ ↘
- non possono essere uno in $[0, \pi]$ e uno in $[\pi, 2\pi]$, a meno di estremi (in un caso è $y > 0$ nell'altro è $y < 0$).

④ Risolvere di brutto il sistema

$$\delta(t) = (t - t^2, t - t^3) \quad t \in [0, 1]$$

Curva chiusa ($\delta(0) = \delta(1) = (0, 0)$) $\leadsto$ ① e ② No.

$$\begin{cases} t - t^2 = s - s^2 \\ t - t^3 = s - s^3 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Spero di dedurre che } t = s \text{ oppure} \\ t = 0 \text{ e } s = 1, \text{ oppure } t = 1 \text{ e } s = 0. \end{array}$$

$$\begin{cases} t - s = t^2 - s^2 \\ t - s = t^3 - s^3 \end{cases} \quad \begin{cases} (t - s) = (t - s)(t + s) \\ (t - s) = (t - s)(t^2 + ts + s^2) \end{cases}$$

o $t = s$ (e non c'è problema), o divido

$$\begin{cases} t + s = 1 \\ t^2 + ts + s^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} s = 1 - t \\ t^2 + \underbrace{t - t^2}_{ts} + \underbrace{1 - t^2}_{s^2} - 2t = 1 \end{cases}$$

— 0 — 0 —

$$\begin{array}{l} t=0 \quad s=1 \\ \nearrow \\ t^2 = t \\ \searrow \\ t=1 \quad s=0 \end{array} \quad \text{😊}$$