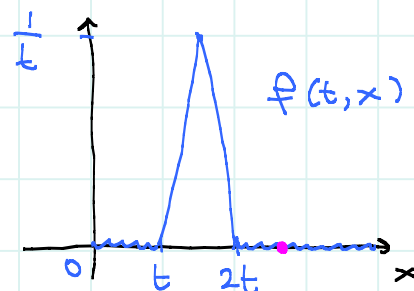


IL CONTROESEMPIO

Per ogni $t \geq 0$ consideriamo $f(t, x)$ fatta come in figura



Per ogni $t > 0$ vale che

$$\int_0^1 f(t, x) dx = \text{area triangolo} = \frac{1}{2}$$

Per ogni $x \in [0, 1]$, e in realtà anche per ogni $x \in \mathbb{R}$, abbiamo che

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, x) = 0$$

(anzi $f(t, x) = 0$ se t è abbastanza piccolo)

↑ una "quanto piccolo" dipende da x

Quindi

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_0^1 f(t, x) dx = \frac{1}{2} \quad \text{ma}$$

$$\int_0^1 \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t, x) dx = 0$$

Quindi **LIMITE DELL'INTEGRALE $\neq$ INTEGRALE DEL LIMITE**

Con una ipotesi in più funzionerebbe... anche senza uniformità... e la parola chiave è **DOMINAZIONE**, cioè l'esistenza di una funzione $g(x)$, integrabile in $[0, 1]$, tale che

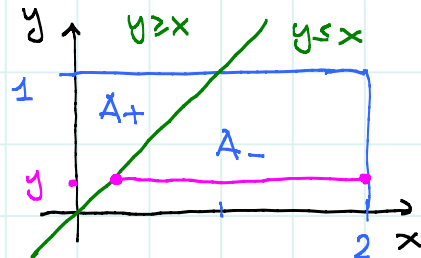
$$|f(t, x)| \leq g(x) \quad \forall x \in [0, 1] \quad \forall t \text{ dove ci interessa.}$$

— o — o —

Esempio 1 $A = [0, 2] \times [0, 1]$ $\iint_A |y-x| dx dy$

In A_+ si ha che $|y-x| = y-x$

In A_- si ha che $|y-x| = x-y$



Quindi $\iint_A |y-x| dx dy = \iint_{A_+} (y-x) dx dy + \iint_{A_-} (x-y) dx dy$

$$= \iint_{A_+} (y-x) dx dy - \iint_{A_-} (y-x) dx dy$$

$$= \int_0^1 dx \int_x^1 dy (y-x) - \int_0^1 dy \int_y^2 dx (y-x)$$

normale asse x normale asse y

In alternativa

$$\iint_A |y-x| dx dy = \iint_A (y-x) dx dy - 2 \iint_{A_-} (y-x) dx dy$$

(basta aggiungere e togliere $\iint_{A_-} (y-x) dx dy$ alla scrittura precedente)

Esempio 2 $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ $\iint_A |x| dx dy$

$$= 4 \iint_D x dx dy = 4 \int_0^1 d\rho \int_0^{\pi/2} d\theta \rho \cos \theta \cdot \rho = \text{banale}$$

↑
parte nel 1° quadrante

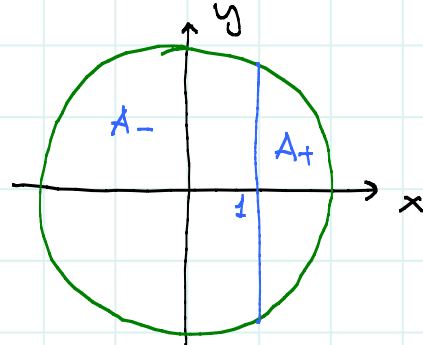
Esempio 3 $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$ $\iint_A |x-1| dx dy$

$$= \iint_A (x-1) dx dy - 2 \iint_{A_-} (x-1) dx dy$$

oppure

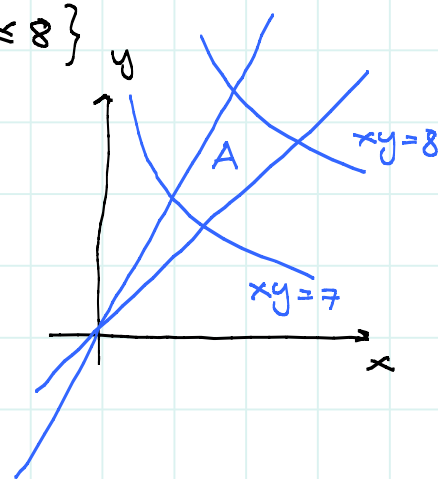
$$= \iint_A (1-x) dx dy - 2 \iint_{A_+} (1-x) dx dy$$

↑ banale ↑ fatto alcune volte in passato



Esempio 4 $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \leq 2x, 7 \leq xy \leq 8\}$

Area (A)



1° modo Mi diverto a spezzare 😊

2° modo $1 \leq \underbrace{\frac{y}{x}}_u \leq 2, \quad 7 \leq \underbrace{xy}_v \leq 8$

$$\text{Area}(A) = \iint_A 1 \, dx \, dy = \int_1^2 du \int_7^8 dv \, 1 \cdot J(u, v)$$

Calcoliamo $J(u, v)$. 1 - Ricavare... x e y in funzione di u e v

$$\begin{cases} \frac{y}{x} = u \\ xy = v \end{cases} \quad \begin{cases} y^2 = uv \rightsquigarrow y = \sqrt{u} \sqrt{v} \\ x^2 = \frac{v}{u} \rightsquigarrow x = \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}} \end{cases}$$

Ora con un po' di radici faccio la matrice $\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}$... si fa

3° modo (OFF LABEL) Calcolo la matrice "inversa"

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ y & x \end{pmatrix} \quad |\text{Det}| = \left| -\frac{y}{x} - \frac{y}{x} \right| = 2 \left| \frac{y}{x} \right| = 2u$$

Il pagamento di prima è l'inverso di questo, cioè $J(u, v) = \frac{1}{2u}$ e quindi

$$\text{Area}(A) = \int_1^2 du \int_7^8 dv \, \frac{1}{2u} = \text{banale}$$

(anche ad analisi 1 si facevano queste cose)

Giustificazione + serie

$$\int_1^2 du \int_{\frac{1}{u}}^8 dv \frac{1}{2u} =$$

cambio variabili poleolo
 $\frac{y}{x} = u$
 $xy = v$

$$\iint_A \frac{x}{2y} \cdot J(x,y) dx dy = 0$$

" $\frac{x}{y}$

Esempio 5 $F = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2+z^2 \leq 1}_{\text{cilindro asse } y}, \underbrace{y^2+z^2 \leq 1}_{\text{cilindro asse } x} \}$

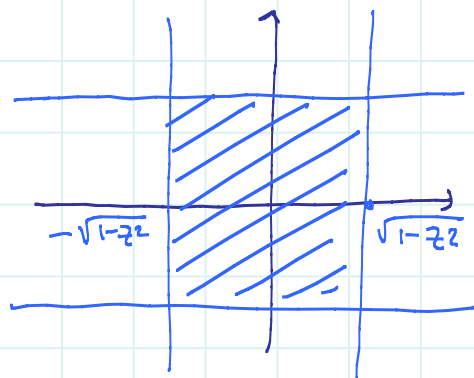
↑
 intersezione di 2
 cilindri con assi $\perp$

Vol (F) = ?

1° modo Per sezioni !! Le sezioni ad altezza z sono dei quadrati !!!

$$\begin{aligned} x^2 &\leq 1-z^2 & y^2 &\leq 1-z^2 \\ |x| &\leq \sqrt{1-z^2} & |y| &\leq \sqrt{1-z^2} \end{aligned}$$

$$\text{Vol}(V) = \int_{-1}^1 \text{Area}(S_z) dz = 4 \int_0^1 (1-z^2) dz = 0$$



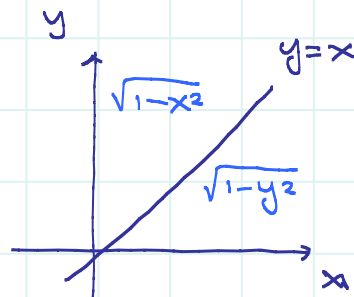
2° modo Per colonne. Fissato x e y , dove varia z ?

$$x^2+z^2 \leq 1, y^2+z^2 \leq 1 \rightsquigarrow z \leq \sqrt{1-x^2}, z \leq \sqrt{1-y^2} \text{ e analoghe } z \geq$$

$$\text{Quindi } z \leq \min \{ \sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-y^2} \}$$

Il minimo dipende da chi è + grande tra x e y

La base è il quadrato $[-1,1] \times [-1,1]$.



Aggiungere il 3° cilindro ☺