

Integrali dipendenti da parametro

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^d$ e sia $f: \mathbb{R} \times A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione.
Considero la funzione $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$\varphi(t) := \int_A f(t, x) dx$$

Integrale dipendente
dal parametro t

Affinché abbia senso basta che

$\forall t \in \mathbb{R}$ la funzione $A \ni x \rightarrow f(t, x)$ sia integrabile risp.
a Riemann in A .

Domande: continuità e derivabilità di $\varphi(t)$. Stessa cosa per $t \in [a, b]$

Teo 1 Supponiamo che $f(t, x)$ sia continua come funzione di (t, x) .
Allora $\varphi(t)$ è continua come funzione della t .

Specie di dimostrazione Supponiamo $t \in [a, b]$ e A sia compatto.
Allora $\mathcal{Q}$ insieme $[a, b] \times A$ è compatto e quindi f , essendo
continua, allora è pure **unif. continua**.

Fissiamo $t_0 \in [a, b]$ e fissiamo $\varepsilon > 0$. L'uniforme continuità ci
garantisce che esiste $\delta > 0$ t.c.

$$|t - t_0| \leq \delta \Rightarrow |f(t, x) - f(t_0, x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in A$$

↑
non deve dipendere da x

Ma allora

$$|\varphi(t) - \varphi(t_0)| = \left| \int_A f(t, x) dx - \int_A f(t_0, x) dx \right|$$

$$= \left| \int_A (f(t, x) - f(t_0, x)) dx \right|$$

prop.
dell'integrale

$$\leq \int_A |f(t, x) - f(t_0, x)| dx$$

$$\leq \int_A \varepsilon dx$$

se $|t - t_0| \leq \delta$

$$= \varepsilon \text{ misura}(A)$$

↑
lunghezza, area, volume

Questo dice che se $|t - t_0| \leq \delta$, allora $|f(t) - f(t_0)| \leq \varepsilon$.
— o — o —

Oss. Che cosa abbiamo davvero usato come ipotesi?

Che $\forall x \in A$ la funzione $t \rightarrow f(t, x)$ è continua in t_0 ,
cioè verifica la solita storia ε/δ con un δ che dipende da ε
ma non da x (cioè l'uniformità di δ rispetto a x).
— o — o —

Teo 2 (Teo. di derivazione sotto il segno di integrale)

Sotto opportune ipotesi vale che

$$f'(t) = \int_A \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) dx$$

La derivata dell'integrale
è l'integrale della
derivata

Ipotesi di stracomodo: $\frac{\partial f}{\partial t}(t, x)$ continua nella coppia (x, t)

Specie di dim. Mettiamoci in un intervallo $[a, b] \times A$ con
 A compatto. Prendiamo $t_0 \in (a, b)$

$$\frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} = \frac{1}{h} \left\{ \int_A f(t_0 + h, x) dx - \int_A f(t_0, x) dx \right\}$$

$$= \int_A \frac{f(t_0 + h, x) - f(t_0, x)}{h} dx$$

Non è che
posso passare
al limite...

Lagrange risp. alla variabile t $\nearrow$ $= \int_A \frac{\partial f}{\partial t}(t_0 + c(x), x) dx$
 punto misterioso tra $0 \in \mathbb{R}$ che a priori dipende da x

$$= \underbrace{\int_A \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x) dx}_{\text{quello che vorrei}} + \underbrace{\int_A \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}(t_0 + c(x), x) - \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x) \right\} dx}_{\text{spero che vada a 0 quando } R \rightarrow 0}$$

Ma allora siamo alle solite. Serve che $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ t.c. $\uparrow$ indip. da x

$$|t - t_0| \leq \delta \Rightarrow \left| \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x) \right| \leq \varepsilon \quad \forall x \in A$$

Questo è gratis se $\frac{\partial f}{\partial t}$ è continua, quindi unif. continua

Conclusione

$$\int_A \left| \frac{\partial f}{\partial t}(\underbrace{t_0 + c(x)}_t, x) - \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x) \right| dx \leq \int_A \varepsilon dx = \varepsilon \cdot \text{misura}(A)$$

$\uparrow$ che soddisfa $|t - t_0| \leq \delta$ vero se $|R| \leq \delta$

Oss. Potrei ottenere la sola derivabilità in t_0 assumendo che per ogni $x \in A$ la funzione $t \rightarrow f(t, x)$ sia derivabile in t_0 , ma "con un δ uniforme", cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad \forall |R| \leq \delta$$

$$\left| \frac{f(t_0 + R, x) - f(t_0, x)}{R} - \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x) \right| \leq \varepsilon \quad \forall x \in A$$

Caso in dimensione 1 Caso base

$$\varphi(t) = \int_a^b f(t, x) dx$$

Sotto ipotesi ragionevoli

$$\varphi'(t) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) dx$$

Caso più generale :

$$\varphi(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(t, x) dx$$

Sotto ipotesi ragionevoli

$$\varphi'(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) dx + f(t, b(t)) b'(t) - f(t, a(t)) a'(t)$$

Come si giustifica? Consideriamo la funzione

$$F(t, a, b) := \int_a^b f(t, x) dx$$

Allora $\varphi(t) = F(t, a(t), b(t))$

Ma allora per la CHAIN RULE

$$\varphi'(t) = \frac{\partial F}{\partial t}(t, a(t), b(t)) + \frac{\partial F}{\partial a}(t, a(t), b(t)) a'(t) + \frac{\partial F}{\partial b}(t, a(t), b(t)) b'(t)$$

Quindi ci servono le derivate parziali di F risp. a t, a, b .

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, a, b) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) dx \quad (\text{teo. 2 di prima})$$

$$\frac{\partial F}{\partial b}(t, a, b) = f(t, b) \quad \frac{\partial F}{\partial a}(t, a, b) = -f(t, a)$$

Analisi 1

Teorema fondamentale del calcolo integrale

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

$$\frac{d}{db} \int_a^b f(t) dt = f(b)$$

Esempio

$$\varphi(t) = \int_{2t}^{t^2} \sin(tx) dx$$

Allora

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \int_{2t}^{t^2} x \cos(tx) dx + \sin(t^3) \cdot 2t - \sin(2t^2) \cdot 2 \\ &\quad \uparrow \qquad \qquad \qquad \uparrow \\ &\quad f(t, b(t)) \cdot b'(t) \quad f(t, a(t)) \cdot a'(t) \\ &\quad - 0 \quad - 0 \quad - \end{aligned}$$