

AREE, VOLUMI, BARICENTRI

In dimensione 2: $A \subseteq \mathbb{R}^2$. Allora

$$\text{Area}(A) = \iint_A 1 \, dx \, dy$$

Il baricentro è $G = (x_G, y_G)$ dove

$$x_G := \frac{1}{\text{Area}(A)} \iint_A x \, dx \, dy$$

$$y_G := \frac{1}{\text{Area}(A)} \iint_A y \, dx \, dy$$

Oss. Se la figura A non ha densità costante, allora

$\text{Massa}(A) := \iint_A \rho(x, y) \, dx \, dy$ e analogamente

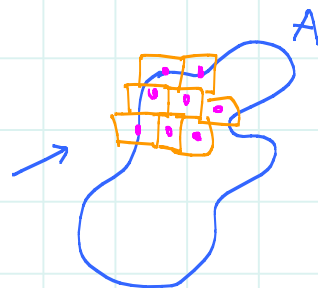
$$x_G = \frac{1}{\text{Massa}(A)} \iint_A x \rho(x, y) \, dx \, dy$$

$$y_G := \dots$$

Oss. Coerente con la def. classica nel caso di un # finito di punti.

Nel passaggio al continuo, possiamo pensare A come unione di tante masse puntiformi e passare al limite

quando infittisco la suddivisione sto appross la def. di integrale

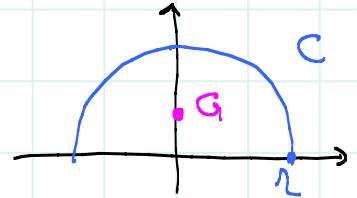


In dimensione 3 è analogo: $A \subseteq \mathbb{R}^3$

$$\text{Vol}(A) = \iiint_A 1 \, dx \, dy \, dz$$

$$x_G = \frac{1}{\text{Vol}(A)} \iiint_A x \, dx \, dy \, dz \quad y_G := \dots \iiint_A y \quad \dots \quad z_G = \dots \iiint_A z$$

Esempio 1 Semicirconfenza di raggio r



$$\text{Area}(C) = \frac{\pi}{2} r^2$$

$x_G = 0$ per simmetria

$$\iint_A y \, dx \, dy = \int_0^r \rho \, d\rho \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \cdot \rho = \underbrace{\int_0^r \rho^2 \, d\rho}_{\frac{1}{3} r^3} \underbrace{\int_0^\pi \sin \theta \, d\theta}_2 = \frac{2}{3} r^3$$

$$y_G = \frac{2}{\pi r^2} \cdot \frac{2}{3} r^3 = \frac{4}{3\pi} r \quad (\text{un po' sotto metà})$$

Esempio 2 Semisfera $z \geq 0$ La chiamiamo S

$$\text{Vol}(S) = \frac{2}{3} \pi r^3$$

$$x_G = y_G = 0$$

$$\iiint_S z \, dx \, dy \, dz = \int_0^r \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi d\varphi \, \rho \sin \varphi \cdot \rho^2 \cos \varphi$$

↑
sferiche
geografiche

$$= \underbrace{\int_0^r \rho^3 \, d\rho}_{\frac{1}{4} r^4} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi}_{\left[\frac{1}{2} \sin^2 \varphi \right]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{4} r^4 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} r^4$$

$$\text{Conclusione} \quad z_G := \frac{3}{2\pi} \frac{1}{r^2} \frac{\pi}{4} r^4 = \frac{3}{8} r < \frac{4}{3\pi} r \quad 9\pi < 32$$

Esempio 3 Baricentro di un cono C

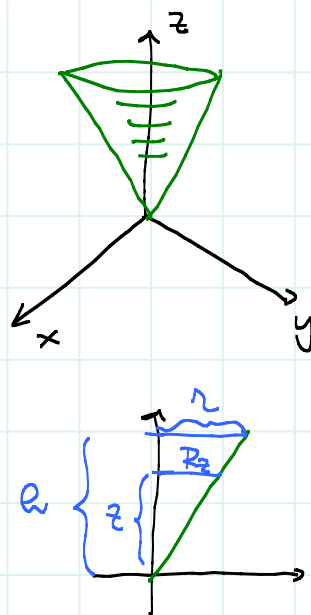
$$\text{Vol}(C) = \frac{1}{3} \pi r^2 R \quad (\text{si fa con l'integrale})$$

$$\begin{aligned} \iiint_C z \, dx \, dy \, dz &= \int_0^R dz \, z \cdot \text{Area}(S_z) \\ &= \int_0^R z \cdot \pi R_z^2 \, dz \end{aligned}$$

$$z: R_z = R: r \quad \leadsto \quad R_z = \frac{r z}{R}$$

$$= \pi \int_0^R \frac{r^2 z^2}{R^2} \cdot z \, dz = \frac{\pi r^2}{R^2} \int_0^R z^3 \, dz = \frac{\pi r^2 R^2}{4}$$

$$z_G := \frac{3}{\pi r^2 R} \cdot \frac{\pi r^2 R^2}{4} = \frac{3}{4} R \quad (\text{il baricentro sta a } \frac{1}{4} \text{ dell'altezza})$$



CALCOLO DEL MOMENTO DI INERZIA RISP. AD UN ASSE

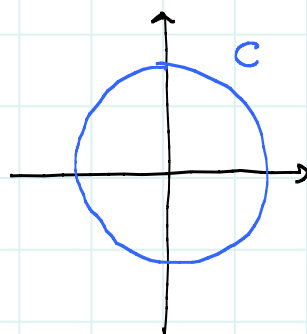
$$I = \iint_A \text{dist}((x,y), \underset{\substack{\uparrow \\ \text{asse}}}{r})^2 \, dx \, dy$$

$$I = \iiint_A \text{dist}((x,y,z), r)^2 \, dx \, dy \, dz$$

Esempio 4 Cerchio risp. a retta passante per il centro

$$\int_0^r \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \, \underbrace{\rho^2 \cos^2 \theta}_{\substack{\uparrow x^2 \\ \text{pensando all'asse } y}} \rho =$$

$$= \underbrace{\int_0^r \rho^3 \, d\rho}_{\frac{r^4}{4}} \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \, d\theta}_{\pi} = \frac{\pi}{4} r^4$$

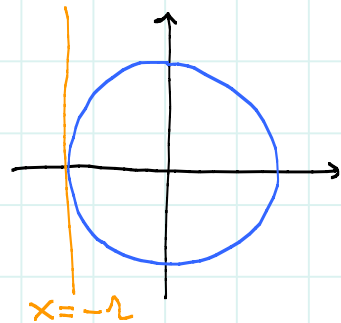


Esempio 5 Cerchio rispetto a retta tangente

$$\iint_C (x+r)^2 dx dy = \iint_C (x^2 + 2rx + r^2) dx dy$$

$$\iint_C r^2 dx dy = r^2 \cdot \text{Area}(C) = \pi r^4$$

$$\iint_C 2rx dx dy = 0 \quad \iint_C x^2 dx dy = \frac{\pi}{4} r^4$$

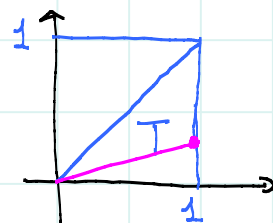


Fatto generale Come calcolo I del cerchio rispetto ad una retta r che dista d dal centro?

$$\begin{aligned} \iint_C (x+d)^2 dx dy &= \iint_C (x^2 + 2dx + d^2) dx dy \\ &= \frac{\pi}{4} r^4 + d^2 \cdot \pi r^2 \end{aligned}$$

Esempio 6 Calcolare la distanza media di un punto di un quadrato da un vertice fissato.

Che cosa devo fare?



$$\iint_Q \sqrt{x^2+y^2} dx dy \quad \text{volendo si fa in cartesiane}$$

Proviamo in polari

$$T: 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \quad 0 \leq \rho \leq \frac{1}{\cos \theta}$$

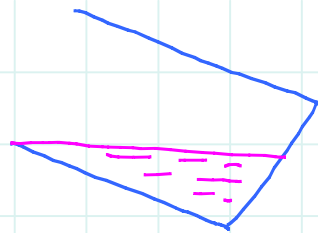
$x \leq 1 \Rightarrow \rho \cos \theta \leq 1$

$$= 2 \iint_T \sqrt{x^2+y^2} dx dy$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos \theta}} \rho \cdot \rho d\rho = \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^3 \theta} d\theta$$

$$= \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos \theta}{(1-\sin^2 \theta)^2} d\theta \stackrel{\substack{y = \sin \theta \\ y = 1}}{=} \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dy}{(1-y^2)^2} = \text{con un po' di pazienza si fa.}$$

Esempio 7 La Lattina



Abbiamo un cilindro pieno.

Lo incliniamo fino a quando la sup.
del liquido passa per il p.to medio della base.

Quanto liquido è rimasto?

Se congeliamo e "rimettiamo in piedi" ci troviamo ad
integrare

$$f(x,y) = \frac{R}{2} y$$

$$\iint_{\substack{x^2+y^2 \leq R \\ y \geq 0}}$$

$$\frac{R}{2} y \, dx \, dy = \text{si fa in polari}$$

$$= \frac{R}{2} \int_0^R \rho \, d\rho \int_0^\pi d\theta \, \rho \sin \theta \, \rho$$

— 0 — 0 —