

INTEGRALI① Notazioni

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz$$

con il solito accordo che

- $A \subseteq \mathbb{R}^3$ è un insieme limitato
- $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ limitata

③ Definizione Soliti 3 casi[3.1] Caso banale

$$A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$$

"mattoni"

$$f(x, y, z) = \text{costante } \lambda \text{ in } A$$

$$\begin{aligned} \iiint_A f dx dy dz &= \lambda \cdot \text{Vol}(A) \\ &= \lambda (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)(b_3 - a_3) \end{aligned}$$

[3.2] Caso semibanale

A = unione finita di mattoni

f = comb. lineare di caratteristiche di
mattoni (step function)

Estendo l'integrale per linearità

[3.3] Caso generale Penso f definita su tutto $\mathbb{R}^3$ e $= 0$ fuori di A
e pongo

$$I^+(f) := \inf \left\{ \iiint_A \varphi(x, y, z) dx dy dz : \varphi \text{ è una step function} \right. \\ \left. \text{e } \varphi \geq f \text{ ovunque} \right\}$$

$$I^-(f) := \sup \left\{ \dots \quad \varphi \leq f \text{ ovunque} \right\}$$

Prop. In generale vale $I^+(f) \geq I^-(f)$

Def. Se sono uguali, allora dico che f è integrabile e il valore comune è l'integrale.

Solite proprietà :

- linearità
- monotonia ($f \geq g$ in $A \Rightarrow \iint_A f \geq \iint_A g$)
- addittività rispetto alla zona di integrazione (sotto-prodotto dell'addittività)

② Interpretazione "fisica"

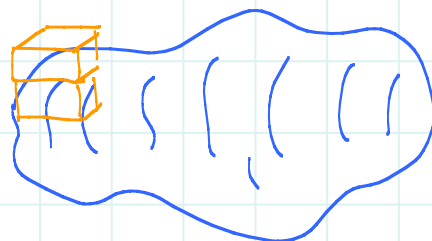
Pensiamo A come un solido di $\mathbb{R}^3$

Supponiamo $f(x, y, z) > 0$ rappresenti la densità del materiale di cui è fatto il solido.

In questo l'integrale rappresenta la massa totale del solido.

Come potrei approssimarla

→ approssimo il solido con dei mattoni (sforando ai bordi se serve)



→ faccio finta che in ogni mattone

la densità sia costante (scegliendo la costante $\geq$ oppure $\leq$ della densità vera a seconda del verso in cui voglio l'approssimazione)

→ sommo il peso dei singoli mattoni (step function)

→ infittisco i mattoni e "passo al limite"

Se f è a segno variabile, posso pensare ad una densità di cariche elettriche.

④ Tecniche di calcolo

Ci sono 3 tipi di formule di riduzione

- caso dei parallelepipedi $3 = 1+1+1$
- per COLONNE $3 = 2+1$
- per SEZIONI $3 = 1+2$

4.1 PARALLELEPEDI

$$A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$$

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} dy \int_{a_3}^{b_3} dz f(x, y, z)$$

Posso fare il conto in 6 modi diversi, a seconda di come permutare le variabili

4.2 PER COLONNE

Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^3$ si dice **NORMALE risp. al piano xy** se esiste un insieme $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ (la base) ed esistono due funzioni $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e $\psi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tali che

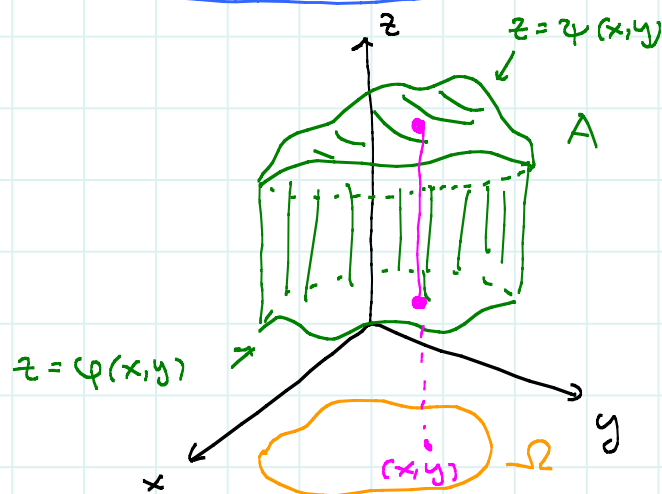
$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \Omega, \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}$$

A è una specie di cilindro con sup laterale che si proietta su $\partial\Omega$ e le due basi "storte" sono i grafici di φ e ψ

Preso un pto $(x, y) \in \text{base } \Omega$, l'intervallo

$$\varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)$$

è la "colonna su (x, y) "



Formula di riduzione

$$\iiint_A f(x,y,z) dx dy dz = \iint_{\Omega} dx dy \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} dz f(x,y,z)$$

↑
prima integro risp. a z sostituendo
gli estremi $\varphi(x,y)$ e $\psi(x,y)$
poi integro in x e y .

Oss. Valgono formule analoghe per insiemi normali
rispetto al piano xz e al piano yz .

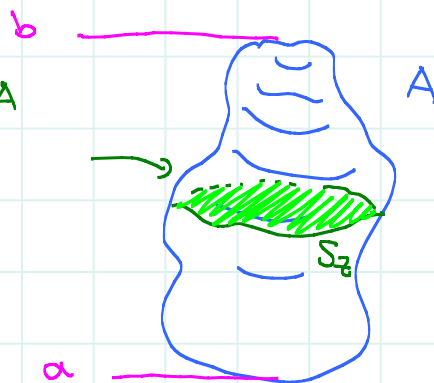
4.3] PER SEZIONI

$$\iiint_A f(x,y,z) dx dy dz = \int_a^b dz \iint_{S_z} dx dy f(x,y,z)$$

dove

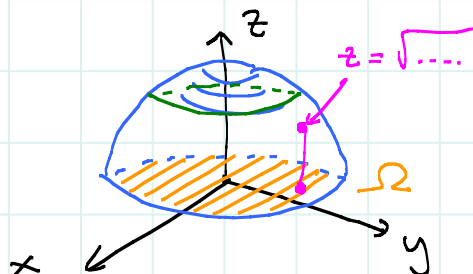
- a e b sono $z_{\min}$ e $z_{\max}$, cioè la max e la minima quota dei punti dell'insieme A
- Fissato $z \in [a, b]$, indichiamo con S_z la "sezione di A ad altezza z " che è una figura 2-dim.

intersezione tra A
ed il piano ad
altezza z



Esempio di descrizione

Sia A = semisfera con centro in $(0,0,0)$
raggio 2 e $z \geq 0$

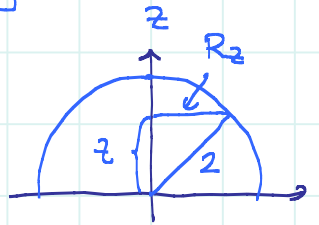


Per colonne

$$\text{Base} : \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \}$$

$$\text{Columna} : 0 \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2} \leftarrow x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

$$A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2 + y^2 \leq 4}_{\text{base}}, \underbrace{0 \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}}_{\text{columna}} \}$$



Per sezioni $z_{\min} = 0$ $z_{\max} = 2$

$$A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 2, \underbrace{x^2 + y^2 \leq 4 - z^2}_{\text{sezione ad altezza } z} \}$$

= cerchio di raggio $R_z = \sqrt{4 - z^2}$

— 0 — 0 —