

Esempio 1 $f(x, y) = x \sin y - y \sin x$

Dimostrare che origine p.to stat. e capire di cosa si tratta

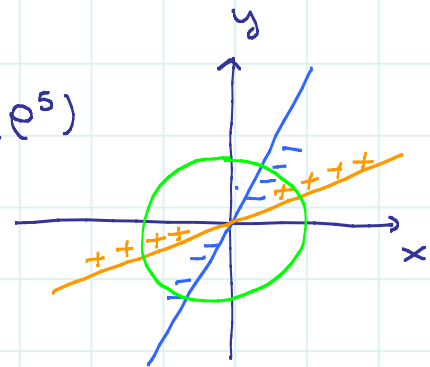
$$\begin{aligned} f(x, y) &= x \left(y - \frac{1}{6} y^3 + o(y^4) \right) - y \left(x - \frac{1}{6} x^3 + o(x^4) \right) \\ &= \cancel{xy} - \frac{1}{6} xy^3 - \cancel{yx} + \frac{1}{6} x^3 y + o(p^5) \\ &\quad \uparrow \\ &\quad o((x^2 + y^2)^{5/2}) \end{aligned}$$

$(0, 0)$ è stat. ("non ci sono" x e y)

$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{BOM}$$

Dal Taylor $f(x, y) = \frac{1}{6} xy(x^2 - y^2) + o(p^5)$

Questo suggerisce di usare



$$f(t, 2t) = \frac{1}{3} t^2 (t^2 - 4t^2) + o(t^5) = -t^4 + o(t^5) \quad \text{MAX LOC}$$

$$f(2t, t) = \frac{1}{3} t^2 (4t^2 - t^2) + o(t^5) = t^4 + o(t^5) \quad \text{MIN LOC.}$$

In ogni intorno di $(0, 0)$ ci sono p.ti in cui $f > 0$ e p.ti in cui $f < 0 \Rightarrow (0, 0)$ è un punto di sella.

Verifichiamo che $\sup \{ f(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \} = +\infty$
 $\inf \{ \quad \quad \quad \} = -\infty$

$$f\left(x, \frac{\pi}{2}\right) = x - \frac{\pi}{2} \sin x \quad \text{Basta mandare } x \rightarrow \pm \infty$$

Esempio 2 $f(x,y) = x^6 + y^2 + x^3y$

Classificazione di $(0,0)$, che è stazionaria

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow (0,0) \text{ non è un max}$$

(se lo fosse, dovrebbe essere $Hf(0,0) \leq 0$)

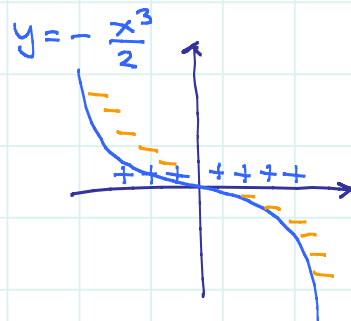
Completando i quadrati:

$$x^6 + x^3y + \frac{1}{4}y^2 + \frac{3}{4}y^2 = (x^3 + \frac{1}{2}y)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0$$

e vale ≥ 0 se e solo se $(x,y) = (0,0) \leadsto \text{MIN. LOC.}$

Esempio 3 $f(x,y) = x^6 + y^2 + 4x^3y$

$$f(x,y) = x^6 + 4x^3y + 4y^2 - 3y^2 = \underbrace{(x^3 + 2y)^2 - 3y^2}_{\text{non ha un segno}}$$



$$f(t,0) = t^6 \leadsto \text{MIN. LOC. in origine}$$

$$f(t, -\frac{t^3}{2}) = -\frac{3}{4}t^6 \leadsto \text{MAX. LOCALE in } (0,0)$$

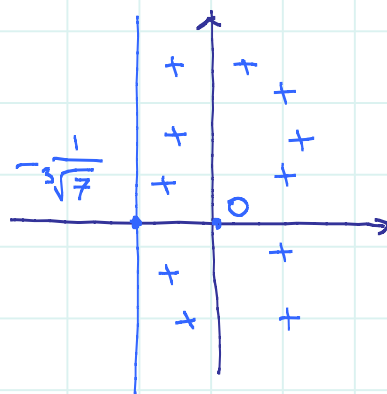
$\leadsto (0,0)$ è p.to di sella

Esempio 4 $f(x,y) = x^6 + y^2 + 7x^3y^2$

In questo caso posso raccogliere y^2

$$f(x,y) = \underbrace{x^6}_{\geq 0 \text{ ovunque}} + \underbrace{y^2}_{\geq 0 \text{ ovunque}} \underbrace{(1 + 7x^3)}_{\geq 0 \text{ (o anche di } \frac{1}{2} \text{ in un intorno di } x=0)}}$$

$x \geq -\frac{1}{\sqrt[3]{7}}$



$\leadsto (0,0)$ è un p.to di min. loc.

Sup / inf su $\mathbb{R}^2$

Sup = $+\infty$

$f(t, t)$ con $t \rightarrow +\infty$

$f(t, 0)$ opp. $f(0, t)$

Inf = $-\infty$ "Paraggio gli esponenti"

$$f(t, t^3) = 2t^6 + 7t^3 \quad \text{mandando } t \rightarrow -\infty$$

Esempio 5 $f(x, y) = |\sin x| + y^2$

$(0, 0)$ è un p.to di min. locale

$f(0, 0) = 0$ e $f(x, y) \geq 0$ sempre

Sup = $+\infty$ Inf = min = 0 e ci sono infiniti p.ti di minimo, cioè tutti quelli del tipo $(k\pi, 0)$ con k intero.

Esempio 6 Consideriamo l'insieme

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + xy + y^2 \leq 27\}$$

È un insieme compatto?

Chiuso lo è (naturalmente c'è il $\leq \dots$). È limitato?

Oss. generale Sia $q(x)$ una forma quadratica in $\mathbb{R}^d$

Supponiamo che $q(x)$ sia def. positiva.

Allora

$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} q(x) = +\infty$ e $\{x \in \mathbb{R}^d : q(x) \leq \text{cost}\}$ è limitato qualunque sia la cost.

Infatti def. pos. $\Rightarrow$ coerciva, quindi

$$q(x) \geq m \|x\|^2$$

$\downarrow$
 $+\infty$

Questo ci dice che fuori da una palla abbastanza grande
avremo $q(x) \geq \text{cost} + 1$ e quindi $x \notin$ insieme

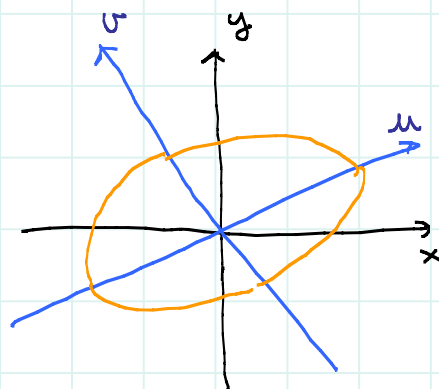
In alternativa $m \|x\|^2 \leq q(x) \leq \text{cost} \Rightarrow \|x\|^2 \leq \frac{\text{cost}}{m}$

Nell'esempio basta dire che $x^2 + y^2 + xy$ è def. pos.

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Det} = 1 - \frac{1}{4} > 0 \quad \text{Tr} = 2$$

Autov: ++



L'insieme negli "assi storti"

diventa

$$a u^2 + b v^2 \leq 27$$

Gli assi storti corrispondono agli autovettori

a e b sono

gli autovalori

— 0 — 0 —