

Taylor e studio locale

I termini fino all'ordine 2 in Taylor si possono scrivere come

$$f(x) = f(0) + \langle \nabla f(0), x \rangle + \frac{1}{2} \underbrace{x^t Hf(0) x}_{\substack{\text{forma quadratica} \\ \text{associata a } Hf(0)}} + o(\|x\|^2)$$

forma quadratica
associata a $Hf(0)$

Dim che $Hf(0) > 0 \Rightarrow 0$ è p.to di min. locale (se è stazionario)

Da Taylor otteniamo

$$f(x) - f(0) = \frac{1}{2} x^t Hf(0) x + r_2(x)$$

$$\text{con } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{r_2(x)}{\|x\|^2} = 0 \quad (\text{non c'è grado } \neq \text{ perché } \nabla f(0) = 0)$$

Ora sappiamo che $Hf(0)$ è coerciva, cioè

$$\exists m > 0 \quad \text{t.c.} \quad x^t Hf(0) x \geq m \|x\|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

da cui

$$f(x) - f(0) \geq \frac{m}{2} \|x\|^2 + r_2(x) = \left\{ \frac{m}{2} + \frac{r_2(x)}{\|x\|^2} \right\} \|x\|^2$$

Per definizione di limite sappiamo che

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \text{t.c.} \quad \frac{r_2(x)}{\|x\|^2} \geq -\frac{m}{4} \quad \forall x \text{ con } \|x\| \leq \varepsilon$$

Ma allora per ogni x con $\|x\| \leq r$ vale la stima

$$f(x) - f(0) \geq \left\{ \frac{m}{2} - \frac{m}{4} \right\} \|x\|^2 = \frac{m}{4} \|x\|^2$$

e quindi è positivo.

— 0 —

Oss. Allo stesso modo si dimostra che $Hf(0) < 0 + \nabla f(0) = 0$ implica 0 p.to di max relativo. (basta invertire opportune disuguaglianze)

Dim. che $Hf(0)$ indef. $\Rightarrow$ 0 non è p.to di max/min loc ($\nabla f(0) = 0$)

Come prima

$$f(x) - f(0) = \frac{1}{2} x^t Hf(0) x + r_2(x)$$

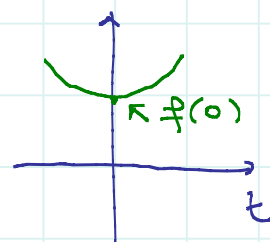
Perché $Hf(0)$ è indefinita, per forza esistono $v \in \mathbb{R}^d$ e $w \in \mathbb{R}^d$ t.c.

$$v^t Hf(0) v > 0$$

$$w^t Hf(0) w < 0$$

Considero $f(tv)$ e $f(tw)$ (2 omni in direzione v e w)

$$f(tv) = f(0) + \frac{1}{2} \underbrace{v^t Hf(0) v}_{>0} \cdot t^2 + \underbrace{r_2(tv)}_{o(t^2)}$$



$\leadsto$ questo omni vede un min. locale

Analogamente $f(tw)$ vede un max locale.

— 0 —

Oss. Allo stesso modo si dimostrano enunciati del tipo
 $Hf(0)$ ha almeno un autovalore positivo + $\nabla f(0) = 0$
 $\Rightarrow$ 0 non è p.to di max loc. (e omni in quella direzione vede un minimo).

Idea della dim. di Taylor in 2 variabili (almeno con resto di Lagrange)

Fissiamo $(x, y) \neq (0, 0)$. Consideriamo la funzione

$$\varphi(t) := f(\underline{tx, ty}) \quad \text{con } t \in \mathbb{R}$$

stiamo percorrendo il segmento
da $(0, 0)$ a (x, y)

Allora

$$f(x, y) = \varphi(1)$$

$$\begin{aligned} &= \varphi(0) + \varphi'(0) \cdot 1 + \frac{1}{2} \varphi''(0) \cdot 1^2 + \frac{1}{6} \varphi'''(0) \cdot 1^3 + \dots \\ &\quad + \frac{1}{m!} \varphi^{(m)}(0) \cdot 1^m + \frac{1}{(n+1)!} \varphi^{(n+1)}(\underset{\substack{\uparrow \\ c \in (0, 1)}}{c}) \cdot 1^n \end{aligned}$$

Formula di Taylor di
Analisi 1 applicata a
 $\varphi(t)$ con poi $t=1$

Calcoliamo le derivate successive di $\varphi(t) = f(tx, ty)$

$$\varphi(0) = f(0, 0)$$

$$\varphi'(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{chain rule}}}{f_x(tx, ty)} x + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{deriv. di } tx \\ \text{risp. ad } x}}{f_y(tx, ty)} y$$

$$\varphi'(0) = f_x(0, 0) x + f_y(0, 0) y \quad \leadsto \text{termine di ordine 1}$$

$$\begin{aligned} \varphi''(t) = & f_{xx}(tx, ty) x^2 + f_{xy}(tx, ty) y x \\ & + f_{yx}(tx, ty) x y + f_{yy}(tx, ty) y^2 \end{aligned}$$

$$\varphi''(0) = f_{xx}(0, 0) x^2 + 2 f_{xy}(0, 0) x y + f_{yy}(0, 0) y^2$$

$\leadsto$ termine di ordine 2

Andando avanti allo stesso modo si potrebbe dimostrare per induzione
che gli altri termini vengono come previsto.

— o — o —

Esempio 1 $f(x,y) = \arctan(x+y^3) - \sin(x+y^2)$

Taylor di ordine 4 sempre in $(0,0)$

$$\sin t = t - \frac{1}{6} t^3 \Rightarrow \sin(x+y^2) = x+y^2 - \frac{1}{6} (x+y^2)^3 + o(\rho^4) \\ = x+y^2 - \frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{2} x^2 y^2 + o(\rho^4)$$

$$\arctan t = t - \frac{1}{3} t^3 + o(t^4) \Rightarrow \arctan(x+y^3) = x+y^3 - \frac{1}{3} (x+y^3)^3 \\ = x+y^3 - \frac{1}{3} x^3 + o(\rho^4)$$

Conclusione

$$f(x,y) = \cancel{x+y^3} - \frac{1}{3} x^3 - \cancel{-y^2} + \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{2} x^2 y^2 + o(\rho^4) \\ = \boxed{-y^2 - \frac{1}{6} x^3 + y^3 + \frac{1}{2} x^2 y^2 + o(\rho^4)}$$

Calcolare $f_{xxy}(0,0)$, $f_{xxx}(0,0)$, $f_{xyy}(0,0)$

non ci sono i corrispondenti termini
nel Taylor

Il coeff. di $x^2 y^2$ nel Taylor è

$$\frac{1}{\underbrace{(2,2)!}_4} \cdot f_{xxyy}(0,0) = \frac{1}{2} \rightsquigarrow f_{xxyy}(0,0) = 2$$

Dimostrare che $(0,0)$ è stazionario e classificarlo

↑
Non ci sono
 x e y nel Taylor

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{semidef. neg. con } -2 \text{ autovalore} \\ \Rightarrow (0,0) \text{ non è min rel.}$$

$$\text{Ma } f(t,0) = \underbrace{-\frac{1}{6} t^3}_{\text{cambia segno vicino a 0}} + o(t^4) \rightsquigarrow \text{SELLA}$$