

Sviluppi di TAYLOR in più variabili

Analisi 1 Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, e sia $n \geq 1$ un intero.

Allora sotto opportune ipotesi esiste un unico polinomio $P_n(x)$, di grado $\leq n$, tale che

$$f(x) = P_n(x) + r_n(x)$$

dove il resto $r_n(x)$ verifica

$$r_n(x) = o(x^n) \quad \text{per } x \rightarrow 0 \quad \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{r_n(x)}{x^n} = 0 \right] \quad (\text{resto di PEANO})$$

oppure

$$r_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(cx) x^{n+1} \quad \text{per un opportuno } c \in (0,1)$$

(resto di LAGRANGE)

Inoltre $P_n(x)$ è dato dalla formula

$$P_n(x) := \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} f^{(i)}(0) x^i$$

↑
derivata i-esima

ed è caratterizzato dall'essere l'unico polinomio di grado $\leq n$ le cui derivate coincidono con quelle di $f(x)$ in $x=0$ fino all'ordine n .

La formula con centro in $x_0 \in \mathbb{R}$ qualunque è analoga

$$f(x_0 + h) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} f^{(i)}(x_0) h^i + o(h^n) + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta h) h^{n+1}$$

Analisi 2 Sia $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $n \geq 1$ intero.

Allora esiste un unico polinomio $P_n(x)$ di grado $\leq n$ tale che
 $\uparrow$
d variabili

$$f(x) = P_n(x) + r_n(x)$$

dove
cioè

$$r_n(x) = o(|x|^n)$$

$o(p^n)$

(resto di PEANO)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{r_n(x)}{|x|^n} = 0$$

limite in più variabili

Il pol. $P_n(x)$ è l'unico pol. di grado $\leq n$ le cui derivate parziali in $x=0$ coincidono con quelle di $f(x)$ fino all'ordine n .

Tale pol. è dato dalla formula

$$P_n(x) = \sum_{|\alpha| \leq n} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(0) x^\alpha$$

per di usare il linguaggio dei MULTI-INDICI

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ con α_i interi ≥ 0

$$|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_d$$

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_1} x_1 \dots \partial^{\alpha_d} x_d}$$

$$\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_d!$$

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d}$$

Volevamo, il resto alla Lagrange si scrive come

$$r_n(x) := \sum_{|\alpha| = n+1} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(c x) x^\alpha$$

Taylor in 2 variabili

$$f(x, y) = f(0, 0)$$

← ordine 0

$$+ f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y$$

← ordine 1

$$+ \frac{1}{2} f_{xx}(0, 0)x^2 + f_{xy}(0, 0)xy + \frac{1}{2} f_{yy}(0, 0)y^2$$

↑
 $\alpha = (2, 0)$

↑
 $\alpha = (1, 1)$

↑
 $\alpha = (0, 2)$

← ordine 2

$$+ \frac{1}{6} f_{xxx}(\dots)x^3 + \frac{1}{2} f_{xxy}(\dots)x^2y + \frac{1}{2} f_{xyy}(\dots)xy^2 + \frac{1}{6} f_{yyy}(\dots)y^3$$

↑
 $\alpha = (3, 0)$

↑
 $\alpha = (2, 1)$

↑
 $\alpha = (1, 2)$

↑
 $\alpha = (0, 3)$

+ ...

Riscrivo il termine di ordine 2:

$$\frac{1}{2!} (f_{xx} x^2 + 2f_{xy} xy + f_{yy} y^2)$$

Riscrivo il termine di ordine 3:

$$\frac{1}{3!} \{ f_{xxx} x^3 + 3f_{xxy} x^2y + 3f_{xyy} xy^2 + f_{yyy} y^3 \}$$

Oss. Formalmente è come fare le potenze del binomio, quindi all'ordine n troverai

$$\frac{1}{n!} \sum_{i=0}^n f_{\underbrace{x \dots x}_i \underbrace{y \dots y}_{n-i}} x^i y^{n-i} \binom{n}{i}$$

Basta osservare che

$$\frac{1}{n!} \binom{n}{i} = \frac{1}{i! (n-i)!} = \frac{1}{\underbrace{(i, n-i)!}_{\text{multiindice}}}$$

In d variabili funziona allo stesso modo

$$(x_1 + \dots + x_d)^m = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} x^\alpha$$

Oss. Siano α e β due multi-indici a d componenti

$$D^\beta x^\alpha \text{ calcolata in } 0 \text{ fa } \begin{cases} 0 & \text{se } \beta \neq \alpha \\ \alpha! & \text{se } \beta = \alpha \end{cases}$$

Come si calcolano i polinomi di Taylor Come ad analisi 1, a partire da quelli delle funzioni elementari

Esempio 1 $f(x,y) = \sin(xy) e^{x+y}$ $n=4$ in $(0,0)$

$$\sin t = t - \frac{1}{6} t^3 + o(t^4)$$

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + o(t^4)$$

$$\begin{aligned} \sin(xy) &= xy + o((x^2+y^2)^2) \\ &\quad \uparrow o(p^4) \\ &\quad + o((x^2+y^2)^{5/2}) \\ &\quad \uparrow o(p^5) \end{aligned}$$

← il termine successivo sarebbe di ordine 6, e cioè x^3y^3

$$e^{x+y} = 1 + x+y + \frac{1}{2} (x^2 + 2xy + y^2) + o(\underbrace{x^2+y^2}_{p^2})$$

$$\sin(xy) \cdot e^{x+y} = xy + x^2y + xy^2 + \frac{1}{2} x^3y + x^2y^2 + \frac{1}{2} xy^3 + o((x^2+y^2)^2)$$

Domanda: quanto fa $f_{xxx}(0,0)$?

Fa 0, perché il coeff. di x^3 è $\frac{1}{6} f_{xxx}(0,0)$

— 0 — 0 —