

DERIVATE SECONDE

Analisi 1 Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile due volte. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un p.to stazionario, cioè $f'(x_0) = 0$

Allora

- x_0 p.to di min. loc. $\Rightarrow f''(x_0) \geq 0$
- x_0 p.to di max. loc. $\Rightarrow f''(x_0) \leq 0$
- $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ p.to di min. loc.
- $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ p.to di max. loc.
- $f''(x_0) = 0 \Rightarrow$ BOH (può essere max/min loc., flesso)

[Pensare come esempi a $x^4, -x^4, x^5$]

Def. Data $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, si definisce matrice HESSIANA la matrice che ha come elementi le derivate seconde di f in x

$$Hf(x) = \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right\}$$

Per il teorema di inversione dell'ordine di derivazione, si tratta di una matrice simmetrica.

Teorema (Analisi 2) Sia $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile almeno due volte. Sia $x_0 \in \mathbb{R}^d$ un p.to stazionario, cioè $\nabla f(x_0) = 0$.

Allora

- x_0 p.to di min. loc. $\Rightarrow Hf(x) \geq 0$ (semi def. pos.)
- $Hf(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ p.to di min. loc.
- $Hf(x_0)$ indefinita $\Rightarrow x_0$ né p.to di max, né p.to di min, stile MOUNTAIN PASS
- $Hf(x_0) \leq 0 \Rightarrow$ BOH

Esercizio Hard - Hard

Analisi 1: se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^∞ ha 2 p.ti di min. relativo, allora per forza ha un altro p.to stat.

Analisi 2: vale ancora? (2 min. $\Rightarrow$ altro stat., non nec. max)

Esempio 1 $f(x, y) = x \sin y$

Cosa succede nell'origine?

$$f_x = \sin y \quad f_y = x \cos y$$

$$\nabla f(0, 0) = (0, 0)$$

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & \cos y \\ \cos y & -x \sin y \end{pmatrix}$$

$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\text{Det} < 0 \Rightarrow$ autovalori $+$ $-$

$\Rightarrow (0, 0)$ è p.to di sella (mountain pass)

Esempio 2 $f(x, y) = \cos y + \cos x$

È ovvio che $(0, 0)$ è un p.to di max locale perché

$$f(0, 0) = 2 \geq f(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\nabla f(x, y) = (-\sin x, -\sin y)$$

$$\nabla f(0, 0) = (0, 0)$$

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} -\cos x & 0 \\ 0 & -\cos y \end{pmatrix}$$

$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \leadsto \text{autov. : } - -$$

Oss. La traccia della matrice Hessiana è il Laplaciano

Esempio 3 $x^4 + y^2 - xy$

Trovare i p.ti stazionari e capire cosa sono

$$\nabla f(x,y) = (4x^3 - y, 2y - x)$$

$$\begin{cases} 4x^3 - y = 0 \\ 2y - x = 0 \end{cases} \rightsquigarrow x = 2y \rightsquigarrow 32y^3 - y = 0 \rightsquigarrow y = 0 \\ \rightsquigarrow y = \pm \frac{1}{4\sqrt{2}}$$

Abbiamo quindi 3 p.ti stazionari.

[Potremmo sapere che i p.ti stat. erano almeno 3 senza fare conti?]

Calcolo

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} x^4 + y^2 - xy \quad (\text{se esiste} = +\infty)$$

Paraggio gli esponenti (posso assumere di essere nel 1° quadrante)
 $x = u \quad y = v^2$

Mi ritrovo

$$\lim_{u^2+v^2 \rightarrow +\infty} u^4 + v^4 - uv^2 = +\infty$$

... in polari ... $p^4 (\underbrace{\cos^4 \theta + \sin^4 \theta}_{\geq m > 0}) - p^3 \cos \theta \sin^2 \theta \geq m p^4 - 37 p^3$
(solito discorso)

Per W generalizzato esiste il minimo, ed è un numero negativo

$$f(2t, t) = 16t^4 + t^2 - 2t^2 = 16t^4 - t^2$$



$\rightsquigarrow f$ assume valori negativi $\rightsquigarrow \min < 0 \rightsquigarrow$ il minimo non è sugli assi, quindi è in un certo (x_0, y_0) con $x_0 \neq 0$ e $y_0 \neq 0$.
Ma allora $(-x_0, -y_0)$ è un altro p.to di min.

In fine l'origine è banalmente stat. $\rightsquigarrow$ almeno 3 stat.]

Per classificare i 3 p.ti staz. posso fare la matrice Hessiana, ma so già che

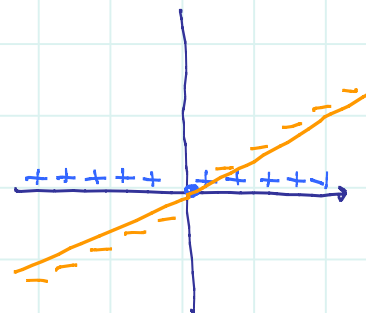
→ i 2 p.ti "strani" sono p.ti di min.

→ l'origine è una sella perché

$f(2t, t)$ vede un max

$f(t, 0)$ vede un min

In ogni intorno di $(0,0)$ ci sono p.ti in cui $f > 0$ e p.ti in cui $f < 0$.



Classificazione di $(0,0)$ come p.to staz

$$f(x,y) = x^2 + y^4$$

MIN. LOC. (e anche glob.)

$$f(x,y) = x^2 - y^4$$

SELLA $(f(t,0), f(0,t))$

$$f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$$

MIN. loc. e glob. ma non stretto

$$f(x,y) = x^2 + y^3$$

SELLA $f(0,t) = t^3$

$$f(x,y) = (x+y)^3$$

SELLA $f(0,t) = t^3$

In tutti gli esempi $Hf(0,0)$ ha almeno un autovalore nullo

$x^2 + 2xy + y^2$ ha ∞ p.ti staz. di min.

— 0 — 0 —