

Forme quadratiche

- in 2 variabili $q(x, y) = ax^2 + by^2 + 2cxy$
- in 3 variabili $q(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz$
- analogamente in n variabili

Forme vs matrici simmetriche: in generale

$$q(x) = x^t A x$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 vettore matrice $d \times d$
 d -dimension. simmetrica

$$ax^2 + by^2 + 2cxy = (x, y) \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Una forma quadratica si dice

- definita positiva se $q(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$
- semidef. positiva se $q(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$
- idem con (semi)def. neg.
- indefinita se $\exists x \in \mathbb{R}^d$ t.c. $q(x) > 0$
 $\exists y \in \mathbb{R}^d$ t.c. $q(y) < 0$

Segnatura di $q(x)$: sono 3 numeri m_0, m_+, m_- tali che

$$m_0 + m_+ + m_- = d$$

- $m_+ = \max$ dim. di sottospazio su cui q è def. pos. (# autov. > 0)
- $m_- =$ " " " " " " neg. (# autov. < 0)
- $m_0 =$ ciò che rimane = dim. ker A (# autov. $= 0$)

In questo senso si parla di matrici $> 0, \geq 0, < 0, \leq 0$

$\uparrow$
simmetriche

Come calcolare la segnatura?

- ① segno autovalori
- ② Sylvester (minori orlati)
- ③ Completamento quadratico
- ④ Cartesio (dal segno dei coeff. del pol. caratteristico)

Esempio $x^2 + 2y^2 + 8xy$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{Det} = -14 \leadsto \text{autov} - + \leadsto \text{indefinita}$$

(Questo da solo dice che esistono direzioni in cui il limite all'infinito fa $\pm \infty$)

$$\begin{aligned} x^2 + 2y^2 + 8xy &= x^2 + 8xy + 2y^2 = x^2 + 8xy + 16y^2 - 16y^2 + 2y^2 \\ &= (x + 4y)^2 - 14y^2 \\ &= (x + 4y)^2 - (\sqrt{14}y)^2 \end{aligned}$$

In generale: scrivo $q(x)$ come somma/differenza di $\square$ di roba lin. indep. Allora

$m_+ = \# \text{ quadratici con il } +$

$m_- = \# \text{ quadratici con il } -$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 4 \\ \hline 4 & 2 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Det } 1 \times 1 = 1$$

$$\text{Det } 2 \times 2 = -14$$

d'ufficio intesta

$$\begin{array}{cc} + & + & - \\ \underbrace{\quad} & \underbrace{\quad} & \\ p & v & \end{array}$$

$$\# p = m_+$$

$$\# v = m_-$$

Esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -7 \\ 2 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Det } 3 \times 3 = -14 - 14 - 4 + 49 > 0$$

$$+++ \quad \boxed{+ - -}$$

$q(0,0,1) = 0$ e quindi non può essere def. pos.

$\text{Det}_{2 \times 2} < 0 \leadsto$ da qualche parte c'è negatività

Def. Una forma quadratica si dice COERCIVA se

$$\exists c > 0 \text{ t.c. } q(x) \geq c \|x\|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

informazione quantitativa sull'essere def. pos.

(c'è l'analogo negativo)

Teorema Una forma quadratica $q(x)$ è def. pos. se e solo se è coerciva.

Inoltre c è il minimo degli autovalori.

Dim. di Analisi 2 Osserviamo che una forma quadratica è 2-omogenea, cioè

$$q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$$

Quindi basta conoscere i valori di $q(x)$ quando $\|x\| = 1$.

Ora $q(x)$ è continua e la sfera $\{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| = 1\}$ è un compatto. Dunque $q(x)$ assume il minimo sulla sfera (Weierstrass) e il min. è il valore in un certo x_0 , dunque è un certo $c > 0$.

Conclusione: posto

$$c := \min \{ q(x) : \|x\| = 1 \}$$

vale che $c > 0$ è

$$q(x) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Fatto} \\ \text{utile}}}{\|x\|} q\left(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{2-omog}}}{\|x\|} \cdot \frac{x}{\|x\|}\right) = \|x\|^2 \underbrace{q\left(\frac{x}{\|x\|}\right)}_{\substack{\geq c \text{ per} \\ \text{def. di } c}} \geq c \|x\|^2$$

Oss. Allo stesso modo posso dim. che

$$q(x) \leq M \|x\|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

$\uparrow$ max di $q(x)$ per $\|x\| = 1$

Dim. di Algebra Lineare Scrivo $q(x) = x^t A x$

A è simmetrica, quindi diagonalizzabile mediante una matrice ortogonale, cioè
esiste M matrice $d \times d$ invertibile tale che

$$M A M^{-1} = D$$

$\uparrow$ diagonale

$$M^{-1} = M^t$$

quindi $M A M^t = D$, da cui $A = M^t D M$
Ma allora

$$\begin{aligned} q(x) &= x^t M^t D M x \\ &= (Mx)^t D (Mx) \end{aligned}$$

Ora $Mx = y = (y_1, \dots, y_d)$. Allora

$$q(x) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_d y_d^2$$

$\uparrow$
 D è
diagonale

$$\begin{aligned} &\geq \min \{ \lambda_1, \dots, \lambda_d \} (y_1^2 + \dots + y_d^2) \\ &= \min \{ \lambda_1, \dots, \lambda_d \} \|y\|^2 \end{aligned}$$

Per concludere basta osservare che $\|y\|^2 = \|Mx\|^2 = \|x\|^2$, in quanto

$$\|Mx\|^2 = \langle Mx, Mx \rangle = (Mx)^t Mx = x^t \underbrace{M^t M}_{Id} x = x^t x = \|x\|^2$$

Oss. Se calcolo i candidati p.ti di max/min per $q(x)$ sulla sfera trovo che sono esattamente gli autovettori normalizzati e il moltiplicatore di Lagrange è l'autovalore corrispondente.

— o — o —