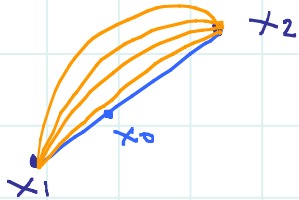


Variaute del teorema degli zeri

Analisi 1: se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua e $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora esiste almeno un p.to $c \in (a, b)$ t.c. $f(c) = 0$.

Analisi 2 (versione basic) $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continua ed esistono x_1 e x_2 in $\mathbb{R}^n$ t.c. $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$, allora esiste $x_0 \in \mathbb{R}^n$ t.c. $f(x_0) = 0$

Dim.

Pongo $\varphi(t) := f(x_1 + t(x_2 - x_1))$
e osservo che $\varphi(0) \cdot \varphi(1) < 0$ e
 φ è continua

Oss. In realtà i p.ti x_0 sono infiniti, perché posso considerare infiniti cammini disgiunti che congiungono x_1 e x_2

Analisi 2 (nuovo basic) Sia $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Supponiamo che

(i) esiste x_n con $\|x_n\| \rightarrow +\infty$ e $f(x_n) \rightarrow -\infty$

(ii) esiste y_n con $\|y_n\| \rightarrow +\infty$ e $f(y_n) \rightarrow +\infty$

Allora per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ l'insieme di livello

$$\{x \in \mathbb{R}^n: f(x) = \lambda\}$$

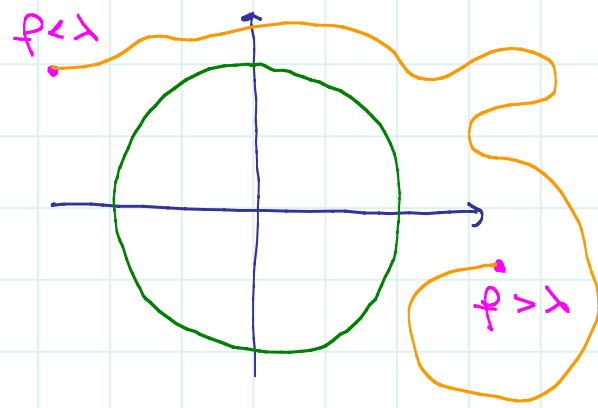
è NON LIMITATO.

Dim Fissato $\lambda \in \mathbb{R}$ devo trovare punti $z_n \in \mathbb{R}^n$ tali che

$$f(z_n) = \lambda \quad \text{e} \quad \|z_n\| \rightarrow +\infty$$

Fissato $R > 0$ considero $B(0, R)$

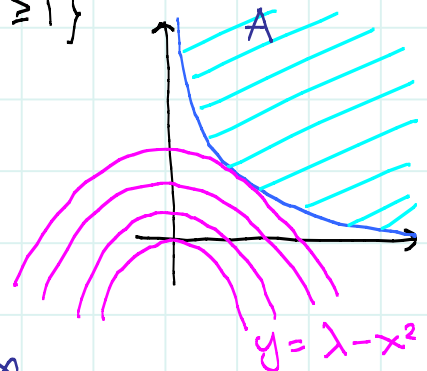
- Per l'ipotesi (i) esiste un p.to fuori da $B(0, R)$ in cui $f < \lambda$
- Per l'ipotesi (ii) esiste un p.to fuori da $B(0, R)$ in cui $f > \lambda$
- Considero un cammino che unisce i due p.ti restano fuori dalla palla
- In quel cammino esiste un punto z con $f(z) = \lambda$.



Esempio 1 $V = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{x^4 + y^3 + e^{xy} - \sin x}_{f(x, y)} = 2022 \}$
è non limitato

Basta osservare che $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(0, t) = \pm\infty$

Esempio 2 $A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, xy \geq 1 \}$
 $f(x, y) = x^2 + y$
inf / sup / max / min di f in A



A non è compatto.

sup = $+\infty$ ad esempio $f(t, t)$ con $t \rightarrow +\infty$
 $f(1, t)$ $f(t, 2022)$

Per inf e min conto su Weierstrass generalizzato. Spero che

$\lim_{\substack{x^2 + y^2 \rightarrow +\infty \\ (x, y) \in A}} f(x, y) = +\infty$ (su tutto $\mathbb{R}^2$ il limite non esiste $f(0, t)$ con $t \rightarrow \pm\infty$)

Infatti nell'insieme A , e anzi ovunque, vale la stima

$$x^2 + y \geq \underbrace{x + y - 1}_{\text{questo tende a } +\infty \text{ nel 1° quadrante}}$$

(ho usato che $x^2 + 1 \geq x$)

Da W. generalizzato so che min. esiste.

La ricerca dei candidati funziona come sempre

→ staz. e sing. interni: $\emptyset$

→ bordo $xy=1$ per cui uso moltiplicatori o param $y = \frac{1}{x}$

Esempio 3 $A = \text{primo quadrante } x \geq 0, y \geq 0$

$$f(x, y) = x^{20} + \arctan(xy)$$

$$B = \text{tutto } \mathbb{R}^2$$



Su A : $\sup = +\infty$ $f(t, t)$ con $t \rightarrow +\infty$

$\min = 0$ perché $f(x, y) \geq 0$ per ogni $(x, y) \in A$

e ci sono p.ti in cui $f(x, y) = 0$, cioè tutti e soli quelli con $x = 0$

Domanda: in A esiste $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x, y) = ?$ No!

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, t) = +\infty$$

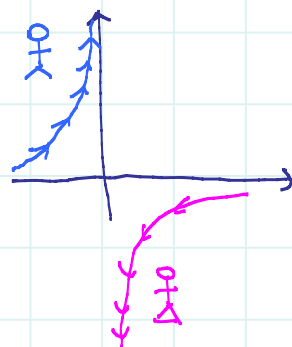
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(0, t) = 0$$

Su B : $\sup = +\infty$ (lo era già solo su un pezzo)

$\inf = -\frac{\pi}{2}$ e MIN non esiste. Come lo dimostro?

Devo dim 2 cose

• $f(x, y) > -\frac{\pi}{2} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Questo è ovvio



• Devo trovare un seq su cui $f(x, y) \rightarrow -\frac{\pi}{2}$

$$f\left(1 - \frac{1}{t}, t\right) = \left(1 - \frac{1}{t}\right)^{20} + \arctan(t-1)$$

quando $t \rightarrow +\infty$ tende a $1 + \frac{\pi}{2}$ ☹

$$\text{☹ } f\left(\frac{1}{t}, t^2\right) = \frac{1}{t^{20}} + \arctan(t) \quad \text{quando } t \rightarrow -\infty \text{ questo tende a } -\frac{\pi}{2} \text{ ☹}$$

Cosa serve?

x piccolo

xy grande e negativo

t

con $t \rightarrow 0^+$

$$-\frac{1}{t^2}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f\left(t, -\frac{1}{t^2}\right)$$

