

LIMITI ALL' INFINITO IN PIÙ VARIABILI

Setting : $D \subseteq \mathbb{R}^n$ NON LIMITATO

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}$$

Vogliamo definire

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = \begin{matrix} \nearrow l \in \mathbb{R} & 1 \\ \nearrow +\infty & 2 \\ \nearrow -\infty & 3 \\ \searrow \text{N.E.} & 4 \end{matrix}$$

Def. 4 Nessuno dei precedenti

Def. 2 $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ se

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists R > 0 \text{ t.c. } f(x) \geq M \quad \forall x \in D \setminus B(0, R)$$

$\uparrow$
anche enorme

Def. 3 $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ se

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists R > 0 \text{ t.c. } f(x) \leq M \quad \forall x \in D \setminus B(0, R)$$

Def. 1 $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = l$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists R > 0 \text{ t.c. } |f(x) - l| \leq \varepsilon \quad \forall x \in D \setminus B(0, R)$$

$\uparrow$
 $l - \varepsilon \leq f(x) \leq l + \varepsilon$

Def. 4 Data una successione $\{x_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ diciamo che x_m tende all'infinito se $\|x_m\| \rightarrow +\infty$ cioè

$\forall R > 0$ si ha che $\|x_m\| \geq R$ definitivamente
 $\uparrow$ da un certo m in poi

Esempio 1 $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} \underbrace{x^2+y^2-3x+2y}_{f(x,y)} = +\infty$

Passiamo in coord. polari

$$\begin{aligned} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) &= \rho^2 + \rho(-3 \cos \theta + 2 \sin \theta) \\ &\geq \underbrace{\rho^2 - 2\rho}_{\text{NON DIPENDE DA } \theta} \\ &\text{e tende a } +\infty \text{ per } \rho \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

Oss. Come dimostro che $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x,y) = +\infty$?
 $= -\infty$

Basta ottenere una stima del tipo

$$f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \geq g(\rho) \quad \text{e} \quad \lim_{\rho \rightarrow +\infty} g(\rho) = +\infty$$

Come dimostro che $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x,y) = l \in \mathbb{R}$?

Cerco una stima del tipo

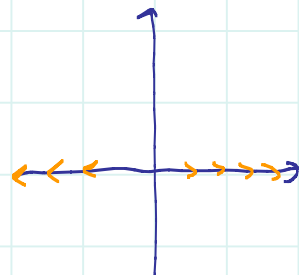
$$g_1(\rho) \leq f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \leq g_2(\rho) \quad \text{e} \quad \lim_{\rho \rightarrow +\infty} g_1(\rho) = \lim_{\rho \rightarrow +\infty} g_2(\rho) = l$$

Esempio 2 $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} x+2y$ $\rightarrow$ su tutto $\mathbb{R}^2$
 $\rightarrow$ sul solo 1° quadrante $x \geq 0, y \geq 0$

Su tutto $\mathbb{R}^2$ non esiste: basta osservare che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, 0) = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t, 0) = -\infty$$



Sul solo primo quadrante invece

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} (x+2y) = +\infty$$

(Moralmente: una delle 2 variabili deve andare a $+\infty$)

Più rigorosamente

$$f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \rho(\cos \theta + 2 \sin \theta) \geq m \rho \xrightarrow{\rho \rightarrow +\infty}$$

dove $m = \min \{ \cos \theta + 2 \sin \theta : \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \} > 0$ perché

→ il minimo esiste

→ quindi è il valore per un certo θ_0

→ $\cos \theta$ e $\sin \theta$ sono ≥ 0 e non contemporaneamente nulli.

Esempio 3 $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} xy$

→ sul primo quadrante $x > 0, y > 0$

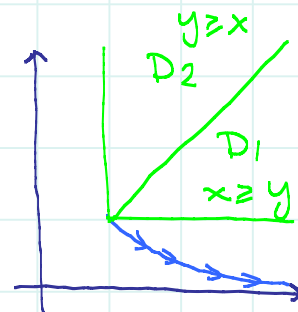
→ su $x \geq 1, y \geq 1$

Il primo non esiste perché

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, t) = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, \frac{1}{t^2}) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} = 0.$$

Il secondo esiste e fa $+\infty$. Proviamo



$$f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \rho^2 \underbrace{\cos \theta \sin \theta}_{>0} \xrightarrow{\rho \rightarrow +\infty} +\infty$$

NO, perché NON esiste una limit. dal basso indipend. da θ

Claim: nella zona $x \geq 1, y \geq 1$ vale la stima

$$xy \geq \frac{1}{2}(x+y)$$

questo tiene a $+\infty$ su tutto $x \geq 0, y \geq 0$
(qui posso usare le polari)

Come dimostro la stima?

• in D_1 si ha $xy \geq \underbrace{x}_{y \geq 1} \geq \frac{1}{2}(x+y)$

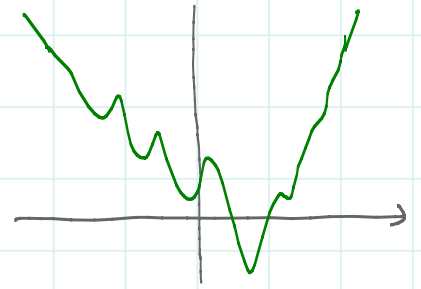
• in D_2 si ha $xy \geq \underbrace{y}_{x \geq 1} \geq \frac{1}{2}(x+y)$

Teo Weierstrass generalizzato

Analisi 1 : sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

(i) f è continua

(ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$



Allora esiste per forza $\min \{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$

Analisi 2 Sia $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

(i) f è continua

(ii) $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Allora esiste $\min \{f(x) : x \in \mathbb{R}^n\}$.

Dim. Sia M tale che $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < M\}$ sia diverso dal vuoto
(basta prendere $M = f(0)$)

Per definizione di limite

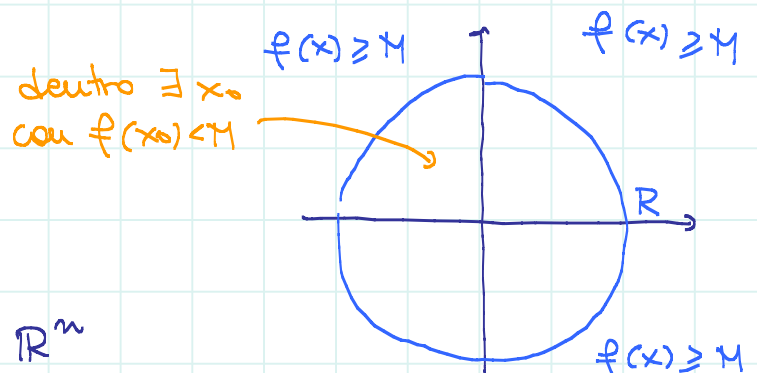
$\exists R > 0$ t.c. $f(x) \geq M$ per ogni x con $\|x\| \geq R$

Ora considero

$$m := \min \{f(x) : \|x\| \leq R\}$$

(esiste per w. classico)

Claim: $f(x) \geq m \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$



• se $\|x\| \leq R$, allora $f(x) \geq m$ perché m è il min. nella palla

• se $\|x\| \geq R$, allora

$$f(x) \geq M \geq m$$

perché M , specie se l'ho preso come $f(0)$, è un competitor nella definizione di m .