

Moltiplicatori di Lagrange (plurale)

Setting: $D \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ con $k < n$. Consideriamo

$$V = \{x \in D : g(x) = 0\}$$

$\uparrow$
 k equazioni

(moralmente V ha dim. $n-k$)

Siano $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in V$ un p.to di max/min per f ristretta a V , cioè

$$\exists r > 0 \quad \forall x \in V \cap B(x_0, r) \quad f(x) \geq f(x_0) \quad (\text{min. loc.})$$

$$\leq \quad (\text{max. loc.})$$

Allora succede almeno una delle seguenti 2 opzioni

- (1) $Jg(x_0)$ ha rango $\leq k-1$ (il max rango possibile sarebbe k)
- (2) Esistono numeri reali $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ t.c.

$$\nabla f(x_0) = \lambda_1 \nabla g_1(x_0) + \dots + \lambda_k \nabla g_k(x_0)$$

$\nwarrow \quad \nearrow$
righe della matrice $Jg(x_0)$

(cioè $\nabla f(x_0)$ è combinazione lineare dei gradienti delle k equazioni di V) (i λ_i sono i moltiplicatori di Lagrange)

Operativamente: se devo trovare max/min di f ristretta a V , allora i candidati si trovano tra le soluz. di due sistemi

1) $g(x) = 0$ rango $(Jg(x)) \leq k-1$ (si annullano tutti i MINORI $k \times k$ della matrice)

2) $\underbrace{g(x) = 0}_{k \text{ equ.}} \quad \underbrace{\nabla f = \lambda_1 \nabla g_1 + \dots + \lambda_k \nabla g_k}_{n \text{ equ.}}$

$n+k$ incognite:
 $x \sim n$ comp.
 k moltiplicatori

Esempio 1 $V = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2 + 2y^2 + z^2 = 4}_{\text{ellissoide}}, \underbrace{x - y + 2z = 0}_{\text{piano}} \}$
 $f(x, y, z) = x + y$

Moralmente: V è l'intersezione tra ellissoide e piano
 $\leadsto$ quindi è una curva

Oss. preliminari: f è continua e V è compatto (è limitato perché lo è l'ellissoide, ed è chiuso perché è definito da uguaglianze)

$$g_1(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 4$$

$$g_2(x, y, z) = x - y + 2z$$

1° sistema $(Jg)(x) = \begin{pmatrix} 2x & 4y & 2z \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \nabla g_1 \\ \leftarrow \nabla g_2 \end{matrix}$

Rango $\leq 1 \leadsto$ si annullano i 3 determinanti 2×2

$$\begin{cases} -2x - 4y = 0 & \leadsto x = -2y \\ 8y + 2z = 0 & \leadsto z = -4y \\ 4x - 2z = 0 & \leadsto -2y - y - 8y = 0 \leadsto y = 0 \\ x^2 + 2y^2 + z^2 = 4 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

$\begin{matrix} \downarrow 3^a \\ \leadsto -8y + 8y = 0 \text{ (}\odot\text{)} \\ \uparrow 5^a \end{matrix}$

$\downarrow$
 $x = z = 0$
 $\downarrow$
 incompatibile con la 4^a

2° sistema $\nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2$

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x + \mu \\ 1 = 4\lambda y - \mu \\ 0 = 2\lambda z + 2\mu \\ x^2 + 2y^2 + z^2 = 4 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

Da questo sistema devono uscire almeno 2 soluzioni

$$3^a \text{ equ. } \leadsto \mu = -\lambda z \leadsto 1 = 2\lambda x - \lambda z$$

$$1 = 4\lambda y + \lambda z$$

$$\text{Sommando: } 2 = 2\lambda x + 4\lambda y \quad 1 = \lambda x + 2\lambda y$$

$$\text{Sottraggo: } 0 = 4\lambda y - 2\lambda x + 2\lambda z = 2\lambda(2y - x + z) \quad \begin{array}{l} \nearrow \lambda = 0 \leadsto \text{NO BUONO} \\ \searrow 2y - x + z = 0 \end{array}$$

$$\text{C'è rimasto } \begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \\ x^2 + 2y^2 + z^2 = 4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} x - 2y - z = 0 \\ y + 3z = 0 \end{array}$$

$$\text{Dalle prime 2: } y = -3z, \quad x = 2y + z = -5z$$

$\leadsto$ sostituisco nella 3^a e finisco.

Trovo due p.ti (non mi serve trovare λ e μ , ma non sarebbe difficile farlo)

Sostituisco in $f(x, y, z)$ e scopro chi è max e chi è min.

Esempio 2 $f(x, y, z) = x^2 - y - z$
 $V = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 5 + x + y \}$

Come è fatto l'insieme

$z \geq x^2 + y^2 \leadsto$ dentro il paraboloide

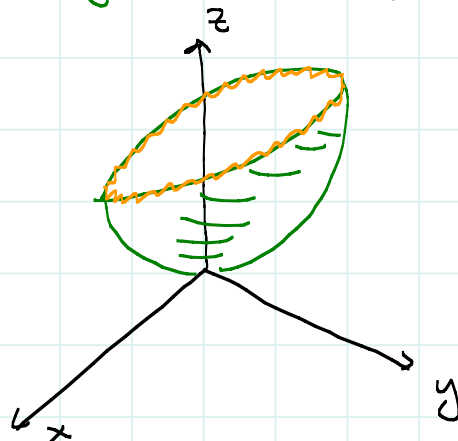
$z \leq 5 + x + y \leadsto$ sotto il piano

Preliminari: dal disegno è ovvio

Come dimostro che l'insieme è limitato? ...

Devo ottenere un bound su

x, y, z



$$\rho^2 \leq z \leq 5 + \rho(\cos\theta + \sin\theta) \leq 5 + 3\sqrt{2}\rho \leadsto \rho^2 \leq 5 + 3\sqrt{2}\rho \leadsto \text{bound su } \rho$$

Singolari int. : $\emptyset$

Staz. " : $\emptyset$

Bordo

→ Studio sull' insieme $z = x^2 + y^2$ (1 solo moltiplicatore)

butta via i candidati con $z \geq 5 + x + y$

→ Studio su $z = 5 + x + y$ (1 solo moltiplicatore)

butta via i candidati con $z \leq x^2 + y^2$

→ studio il bordo del bordo con 2 moltiplicatori

— 0 — 0 —