

TEOREMA DELLE FUNZIONI IMPLICITE (Detto anche, ma solo a Pisa, Teorema del DINI)

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, sia $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 .

Sia $(x_0, y_0) \in D$ tale che $g_y(x_0, y_0) \neq 0$

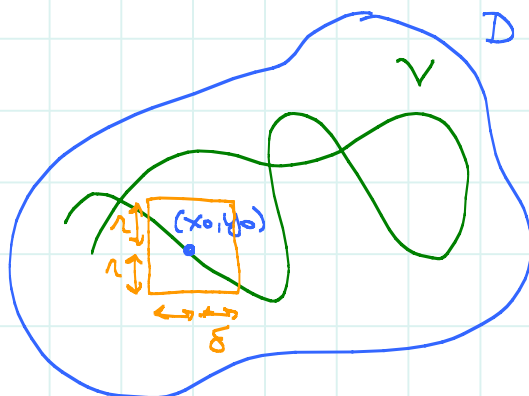
Sia V il luogo di zeri di g , cioè

$$V = \{(x, y) \in D : g(x, y) = 0\} \ni (x_0, y_0)$$

Allora $\exists \delta > 0 \exists \eta > 0 \exists \gamma: [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \rightarrow [y_0 - \eta, y_0 + \eta]$ t.c.

$$V \cap ([x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \eta, y_0 + \eta]) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta], y = \gamma(x)\}$$

Brutalmente: esiste una finestra centrata in (x_0, y_0) in cui V è il grafico di una funzione $\gamma(x)$



Esempio $g(x, y) = x^2 - y^2$ $g(0, 0) = 0$ $\nabla g(0, 0) = (0, 0)$

$V = \times$ $\leftarrow$ non esiste la finestra

Inoltre γ è di classe C^1 e $\gamma'(x_0) = - \frac{g_x(x_0, y_0)}{g_y(x_0, y_0)}$

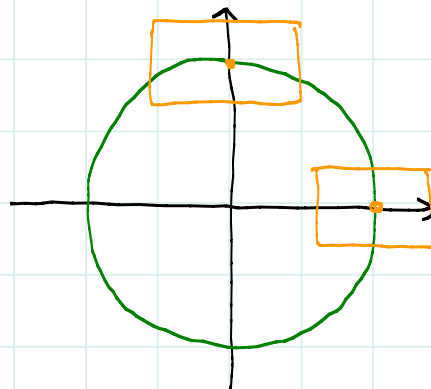
Esempio $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$

$(x_0, y_0) = (0, 1) \quad \nabla g = (2x, 2y)$

$g_y(0, 1) \neq 0$

Le ipotesi di IFT sono verificate

$\delta(x) = \sqrt{1-x^2}$



$(x_0, y_0) = (0, -1)$ Anche qui ipotesi ok e $\delta(x) = -\sqrt{1-x^2}$

$(x_0, y_0) = (1, 0)$

$g_y(1, 0) = 0 \quad \ddot{\cdot}$

$g_x(1, 0) = 2 \neq 0 \rightsquigarrow$ nella finestrella ∇

è grafico di $x = \delta(y)$
 $\sqrt{1-y^2}$

DIM SE sappiamo che δ è derivabile, allora

$$\delta'(x) = - \frac{g_x(x, \delta(x))}{g_y(x, \delta(x))}$$

Perché? Sappiamo $g(x, \delta(x)) = 0$ per ogni $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$

Ma allora la sua derivata rispetto a x è nulla

$\varphi(t) = g(t, \delta(t))$

$0 = \varphi'(t) = g_x(t, \delta(t)) \cdot 1 + g_y(t, \delta(t)) \delta'(t)$

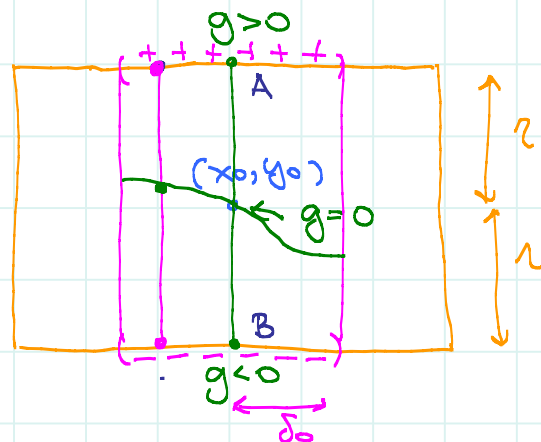
Non resta che ricavare $\delta'(t)$.

NON DIMOSTRIAMO derivabilità e continuità

Dimostriamo l'esistenza di δ

Sappiamo che $g_y(x_0, y_0) \neq 0$,
facciamo finta $g_y(x_0, y_0) > 0$

Allora $g_y(x, y) > 0$ in un rettangolo
centrato in (x_0, y_0) per continuità



Poiché $g_y(x_0, y) > 0$ per forza $g(A) > 0$ e $g(B) < 0$

Per continuità esiste $\delta > 0$ t.c.

$$g(x, y_0 - \epsilon) < 0$$

$$\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$$

$$g(x, y_0 + \epsilon) > 0$$

Su ogni segmento verticale di estremi $(x, y_0 + \epsilon)$, $(x, y_0 - \epsilon)$
con $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ per forza g si annulla almeno una
volta, anzi esattamente una volta (passa da valori + a valori -
ed è strettamente monotona)

— 0 — 0 —

Variante in 3 variabili con disc. analoga

Se $g(x_0, y_0, z_0) = 0$ e $g_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, allora posso scrivere
l'insieme $g(x, y, z) = 0$ come $z = \delta(x, y)$ in un
parallelepipedo centrato in (x_0, y_0, z_0)

Back to moltiplicatori ← singolare

Setting: max/min di $f(x, y)$ sull'insieme $g(x, y) = 0$

Supponiamo che $\rightarrow$ tutto C^1

$$\rightarrow g_y(x_0, y_0) \neq 0$$

$$\rightarrow (x_0, y_0) \text{ pto di max/min locale}$$

Localmente V è il grafico di una funzione $y = \delta(x)$
 Pongo

$$\varphi(t) = f(t, \delta(t))$$

Poiché $t = x_0$ è un p.to di max per φ ,
 dovrà essere $\varphi'(x_0) = 0$.

$$\varphi'(t) = f_x(t, \delta(t)) \cdot 1 + f_y(t, \delta(t)) \delta'(t)$$

$$0 = f_x(x_0, \delta(x_0)) + f_y(x_0, \delta(x_0)) \delta'(x_0)$$

$$\uparrow - \frac{g_x(x_0, y_0)}{g_y(x_0, y_0)}$$

$$= f_x(x_0, y_0) - \underbrace{\frac{f_y(x_0, y_0)}{g_y(x_0, y_0)}}_{\lambda} g_x(x_0, y_0) \leadsto f_x = \lambda g_x$$

Resta da dimostrare che $f_y = \lambda g_y$ con LO STESSO λ , ma
 questo è sostanzialmente la def. di λ !!
 — o — o —

