

MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

Def. (Luogo di zeri) Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e sia $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Il luogo di zeri di g è l'insieme

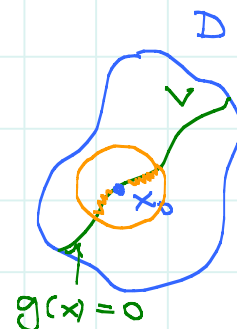
$$V = \{x \in D : \underline{g(x) = 0}\}$$

equazione di V

Def. Siano D e g come sopra. Sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in V$. Si dice che x_0 è p.to di min. relativo per f ristretto a V se

$$\exists r > 0 \text{ t.c. } f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in B(x_0, r) \cap V$$

Idem per i p.ti di max di f ristretto a V



Teorema (Singolo moltiplicatore di Lagrange)

Siano D, g, f come sopra. Supponiamo che f e g siano di classe C^1 in D (derivabili con derivate parziali continue)

Supponiamo che x_0 sia p.to di max/min locale per f ristretto a V .

Allora succede almeno una di queste cose.

(1) $\nabla g(x_0) = 0$

(2) esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ t.c. $\nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0)$

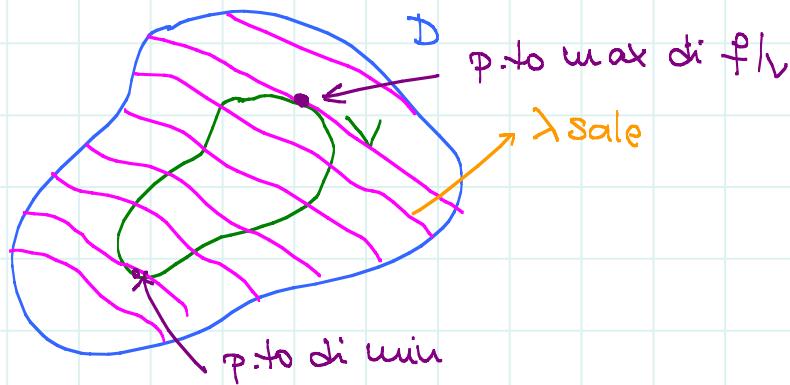
↑
corretto dopo video

↑
moltiplicatore di Lagrange

(in altre parole: $\nabla f(x_0)$ è multiplo di $\nabla g(x_0)$)

NON DIMOSTRAZIONE

Come posso trovare i p.ti di max/min, diciamo globali, di f ristretta a V ?



Pensiamo alle linee di livello di $f(x)$

In quei p.ti le linee di livello di $f(x)$ sono tangenti a V , che a sua volta è una linea di livello di $g(x)$.

In quei p.ti

Linea livello $f(x)$ tangente a Linea livello $g(x)$

Ma allora ∇f e ∇g , che sono $\perp$ alle linee di livello, devono essere multipli tra di loro!!

Questo spiega la condizione (2).

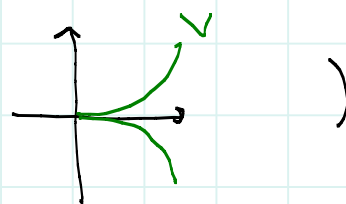
La condizione (1), quando NON si verifica, dice che V insieme V "è fatto bene vicino a x_0 ".

Esempio in $\mathbb{R}^2$ consideriamo $g(x,y) = xy$ e $(x_0, y_0) = (0,0)$

$$\nabla g(0,0) = (0,0)$$

In questo caso V sono i due assi, e quindi "è fatto male vicino a $(0,0)$ "

(esempio analogo : $g(x,y) = y^2 - x^3$



Operativamente Se voglio trovare max/min $f(x)$ su ∂A , posso pensare A come luogo di zeri e cercare i p.ti delle due categorie
↓
di una certa $g(x)$

① Primo sistema $\begin{cases} \nabla g(x) = 0 & \leftarrow \text{avere } \nabla \text{ nullo} \\ g(x) = 0 & \leftarrow \text{stare in } V \end{cases}$

($m+1$ equazioni in n incognite)

② Secondo sistema $\begin{cases} \nabla f(x) = \lambda \nabla g(x) \\ g(x) = 0 \end{cases}$

(sempre $m+1$ equazioni, ma con $m+1$ incognite perché c'è anche λ)

Esempio 1 Max/min di $f(x,y) = x+2y$ su $\boxed{x^2+y^2 \leq 1}$
insieme A

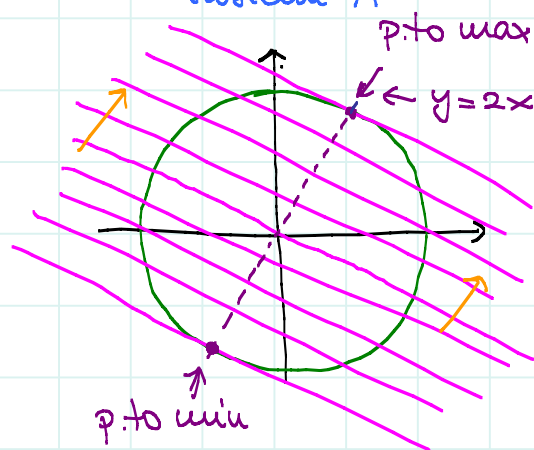
f continua, insieme compatto
 $\Rightarrow$ max e min esistono

• Sing. interni $\leadsto \emptyset$

• Staz. interni: $\nabla f(x,y) = (0,0)$
 $(1,2) = (0,0)$ MAI

• Bordo: ha equazione

$$\frac{x^2+y^2-1}{g(x,y)} = 0$$



1° sistema $\begin{cases} 2x=0 \\ 2y=0 \\ x^2+y^2-1=0 \end{cases} \quad \begin{cases} \nabla g=0 \\ \leftarrow g=0 \end{cases} \Rightarrow \text{NO SOLUZIONI}$

Oss: per ora non ho candidati, dunque me ne aspetto almeno due dal secondo sistema

2° sistema $\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ 2 = 2\lambda y \\ x^2+y^2-1=0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (1,2) = \lambda (2x, 2y) \\ \nabla f \quad \quad \nabla g \end{matrix}$

Dalle prime 2 equ. deduco che $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Dividendo $\frac{2^a}{1^a}$ trovo

$$\frac{y}{x} = 2 \quad \text{cioè} \quad y = 2x$$

Vado nella 3^a: $x^2 + 4x^2 = 1 \quad x = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \quad y = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$

I candidati sono $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$
 $\uparrow$ p.to max $\uparrow$ p.to min

(Il valore di λ se voglio posso trovarlo, ma non serve)

Sostituendo in f si chiude

$$\text{Max} = \sqrt{5} \quad \text{min} = -\sqrt{5}$$

Oss. Potevamo in alternativa parametrizzare il bordo come $(\cos\theta, \sin\theta)$ con $\theta \in [0, 2\pi]$

Ci ritrovavamo a studiare

$$\varphi(t) := f(\cos\theta, \sin\theta) = \cos\theta + 2\sin\theta \quad \text{per } \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\varphi'(t) = -\sin\theta + 2\cos\theta = 0 \quad \text{divido per } \cos\theta \text{ (posso perché...)}$$

$\leadsto \tan\theta = 2 \leadsto$ a quel punto trovo $\sin\theta$ e $\cos\theta$

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 2 \quad \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$y = 2x \quad x^2 + y^2 = 1$$

Oss. Il metodo si applica anche se $\mathcal{Q}$ l'insieme è SOLO BORDO

(max/min di $f(x,y) = x+2y$ su $x^2+y^2=1$)

In questo caso NON HA SENSO cercare stazionari o singolari interni, perché $\mathcal{Q}$ l'insieme NON HA PUNTI INTERNI.

— o — o —