

Max e min in più variabili

Contesto generale: $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, vogliamo calcolare

$$\max / \min \{ f(x) : x \in A \}$$

Def. Si dice che A è

- LIMITATO se $\exists R > 0$ t.c. $A \subseteq B(0, R)$

- CHIUSO se il complementare è aperto, cioè

$$\forall x \notin A \quad \exists r > 0 \quad \text{t.c.} \quad B(x, r) \cap A = \emptyset$$

(Brutalmente: A è chiuso se contiene tutto il suo "bordo")

- COMPATTO se è LIMITATO + CHIUSO.



Teorema (WEIERSTRASS) Se

(i) A è compatto e $\neq \emptyset$

(ii) $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ è continua

allora $\max / \min$ esistono per forza.

Oss. Se A non è compatto, possono esistere ugualmente.

Come li determino? Cercando i p.ti di $\max / \min$.

Dove li cerco? Tra 3 categorie di candidati:

① P.ti stazionari interni: punti x INTERNI ad A t.c. $\nabla f(x) = 0$
 $\uparrow$
 $\exists r > 0$ t.c. $B(x, r) \subseteq A$

② P.ti singolari interni: p.ti x interni ad A t.c. ∇f NON ESISTE

③ P.ti del bordo di A .

$\uparrow$ ad Analisi 2 è più complicato

Tecniche disponibili: supponendo ok l'esistenza, poi

→ casi del tutto elementari

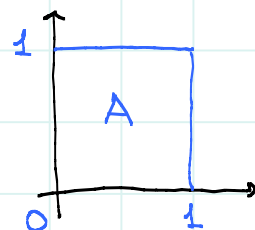
→ linee di livello

→ parametrizzazione del bordo

→ moltiplicatori di LAGRANGE

Esempio 1 $A = [0,1] \times [0,1]$

$$f(x,y) = 2x - 5y$$



Max = 2 (x vale al max 1, y vale al min 0)

Min = -5 (x vale al min 0, y " " max 1)

p.to di Max: (1,0) p.to di min (0,1)

$$f(x,y) = 2x - 5y \leq 2 - 5 \cdot 0 = 2$$

$$\begin{array}{l} \uparrow \quad \uparrow \\ x \leq 1 \quad y \geq 0 \\ \quad \quad -y \leq 0 \end{array}$$

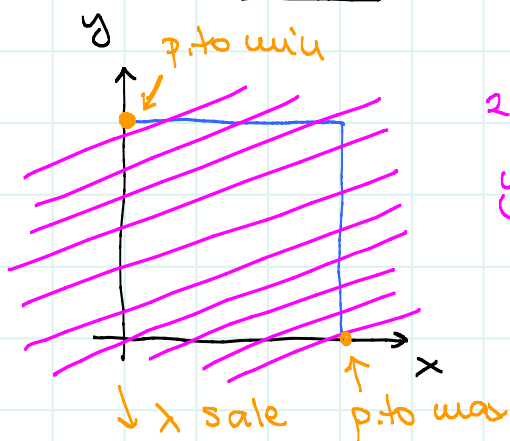
Esempio 2 $A = [0,1] \times [0,1]$

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

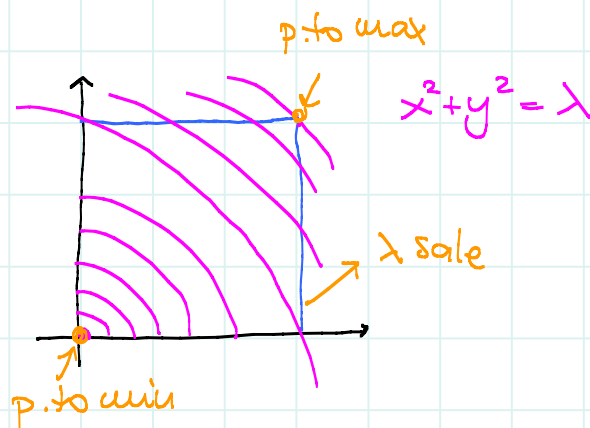
Max = 2 p.to di max: (1,1)

Min = 0 p.to di min: (0,0)

Esempio 1-2bis Come prima, ma uso le linee di livello



$$\begin{aligned} 2x - 5y &= \lambda \\ y &= \frac{2}{5}x - \frac{\lambda}{5} \end{aligned}$$



Esempio 3 $A = \text{triangolo con vertici in } (0,0), (1,0), (0,1)$

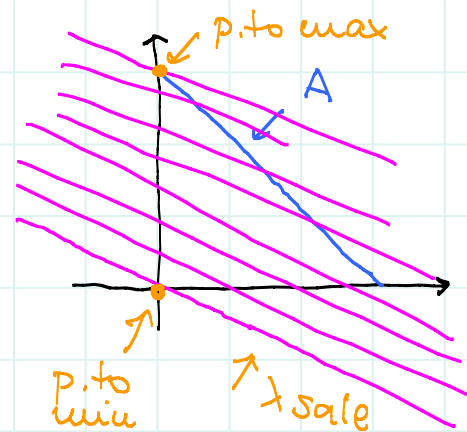
$$f(x,y) = x+2y$$

Weierstrass OK. Linee di livello

$$x+2y = \lambda \rightsquigarrow y = -\frac{x}{2} + \frac{\lambda}{2}$$

Max = 2 P.to max: (0,1)

Min = 0 P.to min: (0,0)

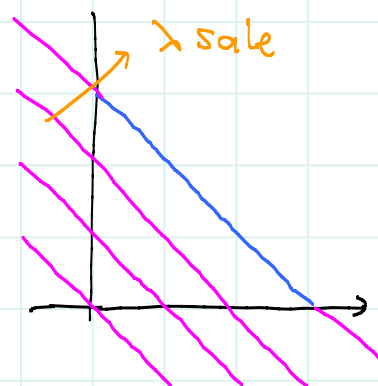


Esempio 4 $A = \text{come prima}$

$$f(x,y) = x+y$$

Min = 0 P.to min: (0,0)

Max = 1 P.to max: tutta l'ipotenusa



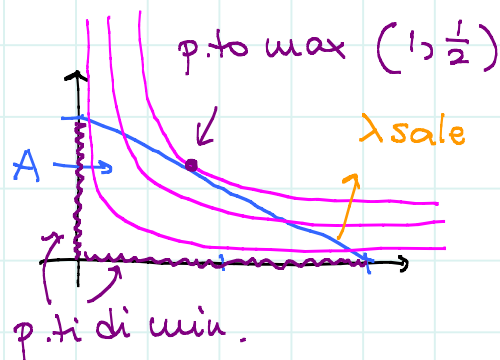
Esempio 5 $A = \text{triangolo con vertici } (0,0), (0,1), (2,0)$

$$f(x,y) = xy$$

Weierstrass OK

Min = 0 : p.to di min: i 2 cateti

$$xy = \lambda \rightsquigarrow \text{solite iperboli } y = \frac{\lambda}{x}$$



Il p.to di max lo aspettiamo in corrisp. dell'iperbole tangente all'ipotenusa. Diamo per buono che il p.to di max sia sull'ipotenusa. Come lo trovo?

$$y = 1 - \frac{x}{2}$$

Parametrizzando:

$$(t, 1 - \frac{1}{2}t)$$

con $t \in [0, 2]$

$$(2t, 1-t)$$

con $t \in [0, 1]$

$\varphi(t) = \underset{x}{2t} (1-\underset{y}{t}) =$ "quota a cui si trova un senius che percorre l'ipotenusa"

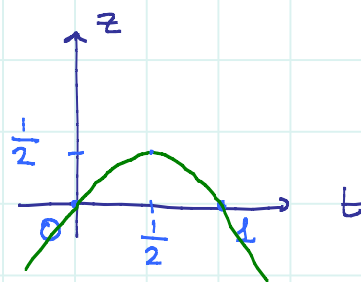
$$= 2t - 2t^2$$

La studio per $t \in [0, 1]$

$$\text{Max} = \frac{1}{2}, \text{ p.to di max} =$$

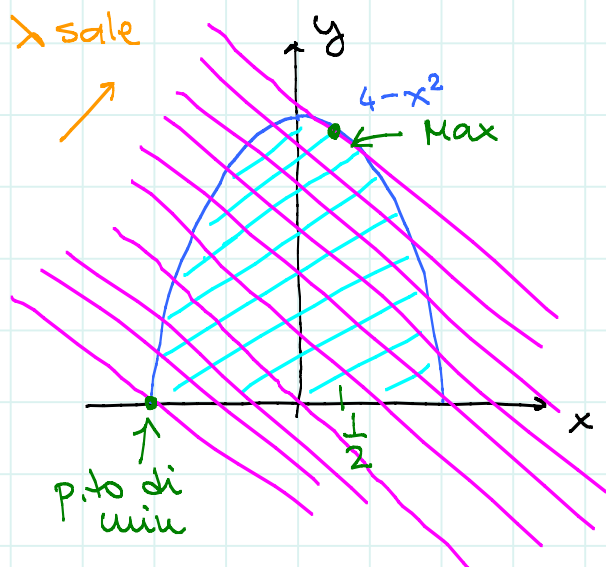
p.to dell'ipotenusa

corrispondente a $t = \frac{1}{2}$, cioè $(1, \frac{1}{2})$



Esempio 6 $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 4 - x^2\}$

$$f(x, y) = x + y$$



Weierstrass ok

Staz. interni e sing. int. NON ESISTONO

$$(\nabla f = (1, 1) \neq (0, 0))$$

Parametrizzo la parabola
 $(t, 4 - t^2)$ con $t \in [-2, 2]$

Devo quindi studiare

$$\varphi(t) = t + 4 - t^2 \quad \text{con } t \in [-2, 2]$$

È una parabola verso il basso che ha max dove $\varphi'(t) = 0$

$$\varphi'(t) = 1 - 2t \rightsquigarrow t = \frac{1}{2}$$

$$\text{p.to di max: } \left(\frac{1}{2}, \frac{15}{4}\right)$$

$$\uparrow$$

$$4 - t^2$$

$$\text{Max: } \varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{17}{4}$$

— o — o —