

Definizioni di limite

Sia $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$
Voglio definire

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \begin{cases} l \in \mathbb{R} & \textcircled{1} \\ +\infty & \textcircled{2} \\ -\infty & \textcircled{3} \\ \text{Non esiste} & \textcircled{4} \end{cases}$$

↑
vettore x che sta
tendendo al vettore x_0

Def. ② Si dice che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ se

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists r > 0 \quad \text{t.c.} \quad f(x) \geq M \quad \forall x \in B(x_0, r) \setminus \{x_0\}$$

anche enorme

$\forall x \text{ t.c. } 0 < |x - x_0| < r$
↑ ↑
norma

Def. ③ Si dice che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ se

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists r > 0 \quad \text{t.c.} \quad f(x) \leq M \quad \forall x \in B(x_0, r) \setminus \{x_0\}$$

anche enorme
negativo

Def. ④ Si dice che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists r > 0 \quad \text{t.c.} \quad |f(x) - l| \leq \varepsilon \quad \forall x \in B(x_0, r) \setminus \{x_0\}$$

anche molto
vicino a 0

Def. ④ Si dice $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ non esiste se non vale nessuno
dei precedenti

Variaute 1 Se in arrivo ho $\mathbb{R}^m$ non ha senso dire che il limite è $\pm \infty$. Il caso in cui $l \in \mathbb{R}^m$ si definisce analogamente interpretando $|f(x) - l|$ come norma

Variaute 2 Se $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}^m$, allora basta mettere

$$\forall x \in (D \cap B(x_0, r)) \setminus \{x_0\}$$

Si pretende che x_0 deve essere un p.to di accumulazione per D cioè

$$\forall r > 0 \quad D \cap B(x_0, r) \neq \emptyset$$

Def. Sia $D \subseteq \mathbb{R}^m$, sia $x_0 \in D$ (veramente), sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$.
Si dice che f è continua in x_0 se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Meta-teorema misterioso

Ogni funzione ottenuta a partire dalle funzioni elementari mediante operazioni algebriche e/o composizioni è continua dove non ci sono problemi burocratici (denom. che si annullano o simili).

Esempio 0

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x \quad x_0}} \frac{\log(\cos(xy) + 3)}{\arctan(x+y^2) + e^{xy}} = \log 4$$

I criteri classici di Analisi 1, ed in particolare

→ confronto

→ carabinieri

continua a funzionare allo stesso modo con la stessa dimostrazione

Esempio 1 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2}$ [$\frac{0}{0}$]

Il limite fa 0.

1° modo Ricordo il trucco del valore assoluto

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{valore assoluto}}}{|f(x)|} \rightarrow 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \rightarrow 0$$

Basta quindi dimostrare che $|f(x,y)| \rightarrow 0$

$$0 \leq \frac{|x^3|}{x^2+y^2} = |x| \underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\leq 1} \leq |x|$$

Ora LHS $\rightarrow 0$ (ovvio) e RHS $\rightarrow 0$ per meta-teorema
 $\uparrow$
left hand side

Quindi il centrale tende a 0.

2° modo Passo in coord. polari $x = \rho \cos \theta$ $y = \rho \sin \theta$

$$\frac{x^3}{x^2+y^2} = \frac{\rho^3 \cos^3 \theta}{\rho^2} = \rho \cos^3 \theta$$

Fare il limite per $(x,y) \rightarrow (0,0)$ equivale a fare il limite per $\rho \rightarrow 0^+$, e a questo punto è evidente.

Esempio 2 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^4}$

1° modo come prima

$$0 \leq \frac{|x^2 y|}{x^2+y^4} = |y| \frac{x^2}{x^2+y^4} \leq |y|$$

Conclusione come prima!

Esempio 3

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$$

Coord. polari

$$\frac{\rho^3 \cos \theta \sin^2 \theta}{\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^4 \sin^4 \theta} = \frac{\rho \cos \theta \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + \rho^2 \sin^4 \theta}$$

Quando $\rho \rightarrow 0$ otteniamo $\frac{0}{\cos^2 \theta}$

→ Se $\cos \theta \neq 0$ sono a posto

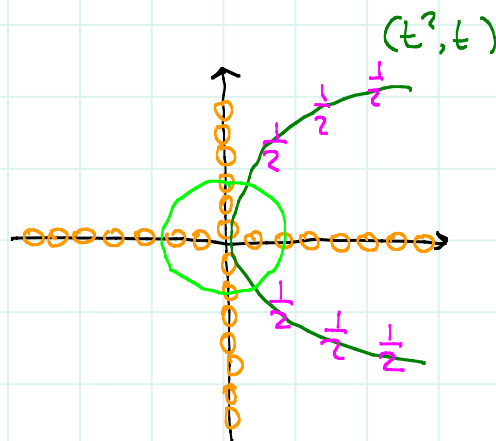
→ Se $\cos \theta = 0$, allora sono sull'asse y, e sull'asse y la funzione vale 0 a tappeto, dunque pure lì tende a 0.

SPAZZATURA !!! NON FUNZIONA !

Questo limite NON ESISTE !!

Sugli assi abbiamo $f(x,y) = 0$

$$f(t^2, t) = \frac{t^4}{2t^4} = \frac{1}{2}$$



Questo impedisce al limite di esistere !!