A.A. 2020/2021
Modulo di Analisi Matematica 2

Stampato integrale delle lezioni

Massimo Gobbino

Indice

Lezione 01. Introduzione al corso. Struttura euclidea in n dimensioni (prodotto scalare, norma, distanza, intorni). Funzioni di più variabili e loro grafico. Linee di livello. . 7

Lezione 02. Restrizioni di funzioni a curve. Definizioni di limite per funzioni di più variabili (nello spazio di partenza). 11

Lezione 03. Esercizi sul calcolo di limiti per funzioni di più variabili. 15

Lezione 04. Calcolo differenziale per funzioni di due variabili: definizione di derivate parziali, derivate direzionali, gradiente, differenziale. Interpretazione geometrica delle derivate parziali e direzionali. 19

Lezione 05. Relazioni tra differenziale, esistenza di derivate parziali/direzionali, continuità. Significato geometrico del gradiente e piano tangente ad un grafico. 23

Lezione 06. Enunciato del teorema del differenziale totale. Esempi di calcolo di derivate parziali. Le linee di livello sono perpendicolari al gradiente. 27

Lezione 07. Massimi e minimi per funzioni di più variabili. Insiemi compatti, teorema di Weierstrass, ricerca euristica dei candidati ad essere punti di massimo/minimo (punti stazionari interni, singolari interni e bordo). 30

Lezione 08. Metodi per lo studio di problemi di massimo/minimo: utilizzo di disuguaglianze elementari, metodo delle linee di livello, parametrizzazioni del bordo. . . . 34

Lezione 09. Metodo dei moltiplicatori di Lagrange (caso di un solo moltiplicatore). Interpretazione geometrica della condizione di parallelismo dei gradienti. 38

Lezione 10. Esempi di problemi di massimo/minimo risolti con varie tecniche, dalle parametrizzazioni del bordo ai moltiplicatori di Lagrange. Utilizzo misto delle due tecniche. 42

Lezione 11. Metodo dei moltiplicatori di Lagrange (caso di più moltiplicatori). Esempi di applicazione. 46

Lezione 12. Ulteriori esempi di problemi di massimo/minimo su insiemi compatti. Massimi/minimi di funzioni con valori assoluti. 50

Lezione 13. Limiti all'infinito per funzioni di più variabili. Importanza dell'ottenere stime uniformi in theta quando si utilizzano le coordinate polari. 54

Lezione 14. Limiti all'infinito per funzioni di più variabili ristette ad opportuni insiemi. 59

Lezione 15. Teorema di Weierstrass generalizzato. Problemi di massimo/minimo su insiemi non limitati. 63

Lezione 16. Coordinate cilindriche e sferiche nello spazio. Utilizzo di tali coordinate per il calcolo di limiti. 67

Lezione 17. Ulteriori esempi di calcolo di limiti e di problemi di massimo/minimo su insiemi non limitati. 71

Lezione 18. Ulteriori esempi di problemi di massimo/minimo su insiemi non limitati. Teorema di esistenza degli zeri in più variabili. 75

Lezione 19. Forme quadratiche, matrice associata, segnatura. Metodi per determinare la segnatura di una forma quadratica: segno degli autovalori, completamento dei quadrati. 79

Lezione 20. Metodi per determinare la segnatura di una forma quadratica: Sylvester in varie forme. Una forma quadratica è definita positiva se e solo se è coerciva: dimostrazione sia via teorema di Weierstrass, sia via teorema spettrale. 84

Lezione 21. Derivate successive, teorema di inversione dell'ordine di derivazione, matrice Hessiana, segnatura della matrice Hessiana vs comportamento di una funzione nell'intorno di un punto stazionario. 88

Lezione 22. Polinomi di Taylor per funzioni di più variabili. Esempi di calcolo di polinomi di Taylor in più variabili a partire da quelli in una variabile. 93

Lezione 23. Dimostrazione di alcuni legami tra la segnatura della matrice Hessiana ed il comportamento locale di una funzione. Matrice Jacobiana per funzioni vettoriali. Chain rule. 98

Lezione 24. Esempi di studio locale di funzioni. 103

Lezione 25. Introduzione agli integrali doppi: notazioni, interpretazione geometrica, idea della definizione via step functions, proprietà base (linearità, monotonia, additività rispetto alla zona di integrazione). 107

Lezione 26. Calcolo di integrali doppi: formule di riduzione sui rettangoli e su insiemi normali. Esempi di calcolo di integrali. 112

Lezione 27. Calcolo di integrali doppi utilizzando le coordinate polari. 117

Lezione 28. Introduzione agli integrali tripli: notazioni, idea della definizione, interpretazione fisica. Formule di riduzione sui parallelepipedi. Interpretazione dell'integrale della funzione costante 1 in una, due, tre variabili. 122

Lezione 29. Calcolo di integrali tripli: formule di spezzamento per colonne e per sezioni. 127

Lezione 30. Uso delle simmetrie per semplificare il calcolo di integrali multipli. 131

Lezione 31. Calcolo di integrali tripli utilizzando coordinate cilindriche e sferiche. . . . 136

Lezione 32. Cambi di variabili in generale per integrali doppi e tripli. Calcolo del determinante Jacobiano. 141

Lezione 33. Calcolo del determinante Jacobiano passando per la trasformazione inversa. Esempi di integrali multipli per funzioni con valori assoluti. 146

Lezione 34. Calcolo di baricentri e momenti d'inerzia utilizzando integrali multipli. . . 151

Lezione 35. Solidi di rotazione: equazione, formula per il calcolo del volume, teorema di Guldino per i volumi. 155

Lezione 36. Esempi delicati di calcolo di integrali doppi e tripli. 160

Lezione 37. Introduzione alle curve: sostegno, speed e velocity, versore e retta tangente, curve chiuse e semplici. 164

Lezione 38. Esempi di disegno di curve. Lunghezza di una curva: definizione e formula per il calcolo nel caso regolare. 169

Lezione 39. Integrali curvilinei: notazioni, interpretazione geometrica, idea della definizione, formula per il calcolo. Baricentro di una curva. Formula per il calcolo della lunghezza di una curva in coordinate polari. 174

Lezione 40. Forme differenziali e campi di vettori. Integrale di una forma differenziale lungo una curva: notazione, definizione, significato fisico, formula per il calcolo. . . 179

Lezione 41. Forme differenziali chiuse ed esatte. Rapporti tra chiusura ed esattezza. L'integrale di una forma differenziale esatta è la differenza tra i valori assunti da una primitiva agli estremi della curva. Caratterizzazione dell'esattezza. 184

Lezione 42. Insiemi convessi, stellati, semplicemente connessi, connessi. Le forme chiuse su insiemi semplicemente connessi sono esatte. Tre strategie per il calcolo dell'integrale di una forma differenziale lungo una curva. 189

Lezione 43. Esempio classico di forma differenziale chiusa ma non esatta. Utilizzo di esattezza e chiusura per il calcolo dell'integrale di forme differenziali lungo curve. . 194

Lezione 44. Esercizi finali su curve e forme differenrziali. 199

Lezione 45. Gradiente, Laplaciano, divergenza, rotore. Formule classiche: divergenza del gradiente, rotore del gradiente, divergenza del rotore. Significato di gradiente/rotore/divergenza nulli/uguali. 203

Lezione 46. Superfici nello spazio: presentazione cartesiana, implicita, parametrica. Esempi di parametrizzazione di superfici. Versore normale e piano tangente. . . . 208

Lezione 47. Area di una superficie: come non si definisce (lanterna di Schwarz), idea della definizione, formula per il calcolo, interpretazione geometrica. Caso delle superfici cartesiane. 214

Lezione 48. Area di una superficie di rotazione. Teorema di Guldino per l'area delle superfici. Integrali superficiali. Baricentro di una superficie. 218

Lezione 49. Integrali di flusso in due e tre variabili: interpretazione fisica e formule per il calcolo. Enunciato del teorema della divergenza in due e tre variabili. Integrali di flusso in due variabili vs integrali di forme differenziali. 223

Lezione 50. Teorema di Gauss-Green (formula di integrazione per parti) in due e tre variabili. Equivalenza tra teorema di Gauss-Green e teorema della divergenza. Calcolo di integrali doppi su insiemi del piano descritti mediante il loro bordo. . . 228

Lezione 51. Formule per l'area di un sottoinsieme del piano descritto mediante il suo bordo. Volume di un sottoinsieme dello spazio descritto mediante il suo bordo. Tecnica di sostituzione della superficie nel calcolo di un integrale di flusso. 233

Lezione 52. Orientazione del bordo di una superficie. Teorema del rotore (teorema di Stokes). 237

Lezione 53. Inversione del rotore (determinare un campo di vettori noto il suo rotore). Esempi di calcolo del flusso di un rotore attraverso una superficie. 241

Lezione 54. Quattro strategie per il calcolo di un integrale di flusso attraverso una superficie. 246

Lezione 55. Integrali impropri in più variabili: definizioni e primi esempi. 251

Lezione 56. Calcolo dell'integrale Gaussiano. Utilizzo delle coordinate polari per lo studio della convergenza di integrali impropri in due variabili. 256

Lezione 57. Ulteriori esempi di studio della convergenza di integrali impropri in due variabili. 261

Lezione 58. Studio della convergenza di integrali impropri in tre variabili (anche parametrici). 265

Lezione 59. Esempi finali di studio di integrali impropri. 269

Lezione 60. Esempi di curve continue di lunghezza infinita. Dimostrazione del teorema della divergenza in un rettangolo. 273

ANALISI 2 — LEZIONE 01

Burocrazia : → Archivio Didattico
→ Forum Studenti

Altri corsi simili : → Analisi 2 2013/14 (Archivio Didattico)
→ 190 AA
→ 637 AA
→ Analisi 2 17/18 e 15/16 (versione Hard)
→ Analisi 2 19/20 (Corso di soli esercizi)

ANALISI 2 → Recupero (equaz. diseq. piano cartesiano) 30 %
→ Analisi 1 (tutto) 40 %
→ Algebra lineare 10 %

L'analisi 2 è ciò che rimane

Di cosa si parla Funzioni di più variabili

Analisi 1
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f : A \to \mathbb{R}$
dove $A \subseteq \mathbb{R}$
esempio $A = [a,b]$
UNA DIM. IN PARTENZA
" " IN ARRIVO

Analisi 2
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
↑ DUE DIM IN PARTENZA
$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R}^{34} \to \mathbb{R}$
$f : \mathbb{R}^{34} \to \mathbb{R}^{72}$
GROSSO SALTO : passare da 1 a 2 dim. di partenza. Il resto è gratis.

1. CALCOLO DIFFERENZIALE (limiti, derivate, max/min) 20+
2. CALCOLO INTEGRALE (integrali propri e impropri) 20−
3. CALCOLO VETTORIALE (curve, superfici, integrali curvilinei e superficiali, GAUSS-GREEN, STOKES) 20

Struttura Euclidea in $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$ = sp. vettoriale

$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

↑ Notazione vettoriale

$(x,y) \in \mathbb{R}^2$ $\quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

↑ notazione con le componenti

↳ $x \in \mathbb{R}^3$

$(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

Prodotto scalare (canonico)

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$

$x \cdot y$ ← più usato dai fisici

Norma e distanza

$$\|x\| = |x| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \underbrace{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}}_{\text{Pitagora}} = \text{"lungh. del vettore"}$$

$$\text{dist}(x,y) = \|x - y\| = \{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n^2)\}^{1/2}$$

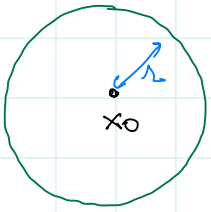
PALLE Dato $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e dato $r > 0$ (raggio) definiamo

$$B_r(x_0) = B(x_0, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(y, x_0) < r\}$$

↑ Ball — centro — raggio — "punti che distano da x_0 meno di r"

$\mathbb{R}^2 \rightsquigarrow$ cerchi

$\mathbb{R}^3 \rightsquigarrow$ sfere

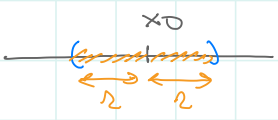


Analisi 1 $\quad \|x\| = \sqrt{x^2} = |x|$

(modulo di x)

$B_r(x_0)$ = numeri y tali che $|y - x_0| < r$

= intorni dell'analisi 1



Funzioni

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x)$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y)$

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y,z)$

$f: \mathbb{R}^{25} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x)$ intendendo che $x \in \mathbb{R}^{25}$

Grafici

$f(x)$ $\quad$ grafico $(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}$

$f(x,y)$ $\quad$ " $= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x,y)\}$

↑ si sale di uno con la dim

$f(x,y,z)$ $\quad$ grafico $(f) = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : w = f(x,y,z)\}$

Come esplorare un grafico

→ LINEE DI LIVELLO

→ PERCORSI DI OMINI

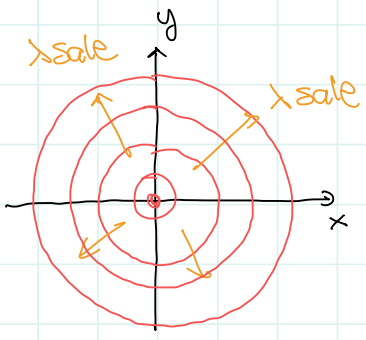
Data $f(x,y)$ funzione e dato $\lambda \in \mathbb{R}$ considero

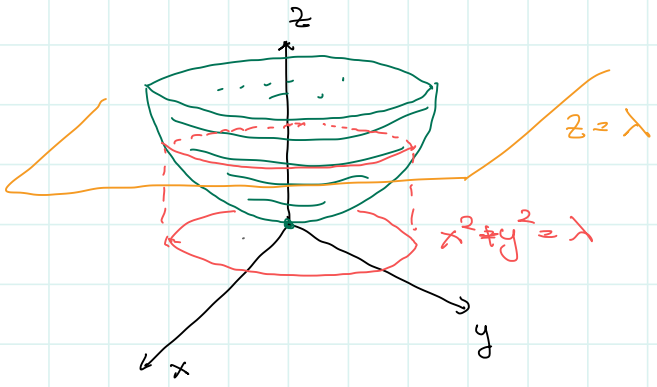
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = \lambda\}$ = punti in cui f vale λ

Esempio 1 $f(x,y) = x^2+y^2$

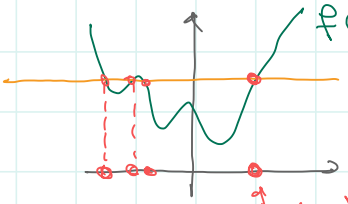
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = \lambda\} =$

- $\emptyset$ se $\lambda < 0$
- solo $(0,0)$ se $\lambda = 0$
- circ. con centro in $(0,0)$ e raggio $\sqrt{\lambda}$ se $\lambda > 0$





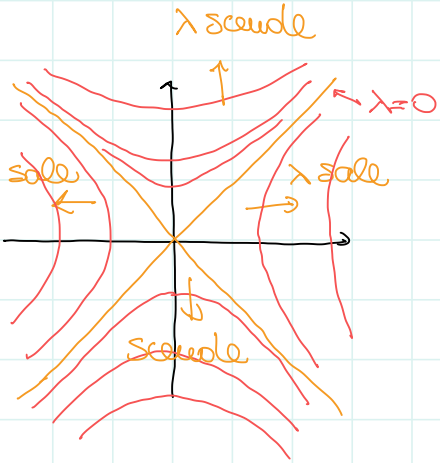
$f(x) = \lambda$



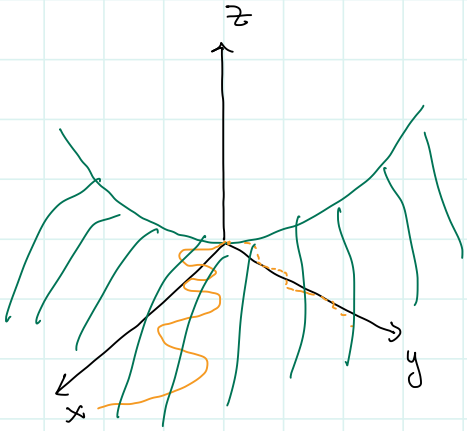
↑ 4 pti in cui $f(x) = \lambda$

Esempio 2 $f(x,y) = x^2 - y^2$

$x^2 - y^2 = \lambda$



passo mostruoso



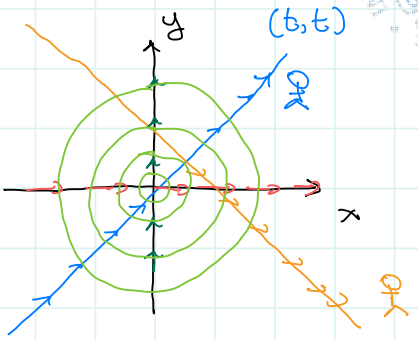
— o — o —

ANALISI 2 – LEZIONE 02

Percorsi di ouiiii Esempi in $\mathbb{R}^2$

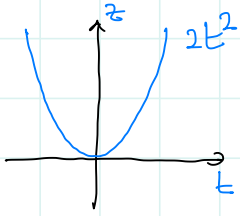
$f(x,y) = x^2+y^2$

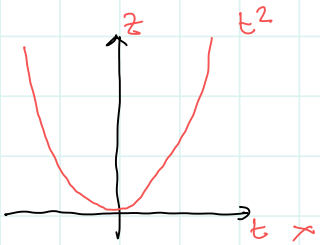
- (t,t) percorre la bisettrice
- $(t,0)$ percorre asse x
- $(0,t)$ percorre asse y
- $(t,t+1)$ percorre retta $x+y=1$, $y=1-x$



Sostituisco nella funzione

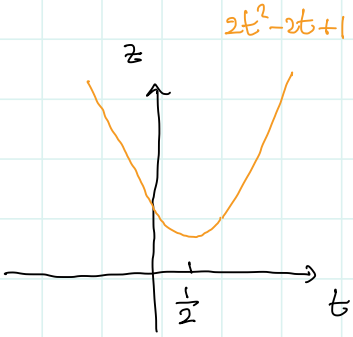
$f(t,t) = t^2+t^2 = 2t^2$ = quota a cui si trova l'ouiiii al tempo t mentre percorre la retta





$f(t,0) = t^2+0 = t^2$

$f(t,-t+1) = t^2+(-t+1)^2 = 2t^2-2t+1$

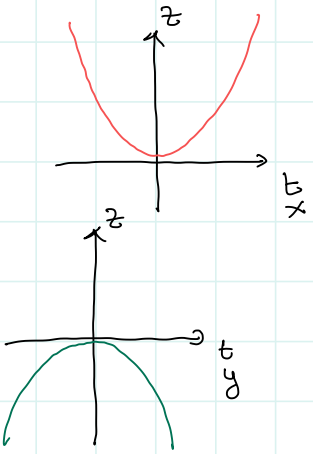


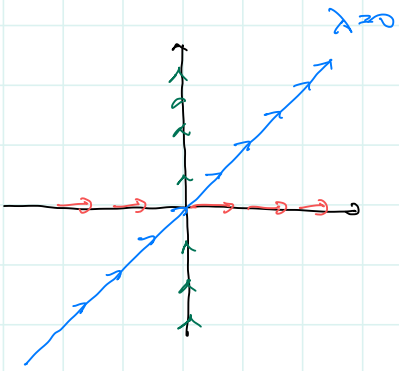
$f(x,y) = x^2-y^2$

$f(t,t) = t^2-t^2 = 0$

$f(t,0) = t^2-0 = t^2$

$f(0,t) = 0-t^2 = -t^2$





LIMITI IN n VARIABILI

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

↑ potrebbe anche essere definita in $A \subseteq \mathbb{R}^n$

Prendiamo $x_0 \in \mathbb{R}^n$ (notazione vettoriale)

Voglio definire

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

↑ vettore

è il vettore x che tende al vettore x_0

Come tutti i limiti, ci sono 4 possibilità

1. esiste ed è $l \in \mathbb{R}$
2. fa $+\infty$
3. fa $-\infty$
4. Non esiste (NESSUNO DEI PREC.)

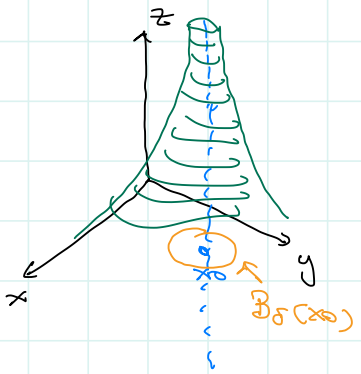
} ogni limite ricade in una ed una sola di queste

Def. di ② Si dice che $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ se

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \text{ t.c. } f(x) \geq M \quad \forall x \in B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$$

- $\forall M \in \mathbb{R}$: anche enorme
- $\exists \delta > 0$ t.c.: che ovviamente dipende da M
- $f(x) \geq M$: f "grande"
- $B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$: palla con centro x_0 e raggio δ

Mi aspetto: più M diventa grande, più δ servirà piccolo.



Def di ③ Si dice che $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ se

anche molto negativi

$$\forall M \in \mathbb{R}$$
$$\exists \delta > 0 \text{ t.c. } f(x) \leq M$$
$$\forall x \in B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$$

Definizione di ② Si dice che $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{t.c.} \quad |f(x) - l| \le \varepsilon \quad \forall x \in B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$$

- $\forall \varepsilon > 0$: anche molto vicino a 0
- $\exists \delta > 0$: dipende da ε
- $|f(x) - l| \le \varepsilon$: $f(x)$ è vicino ad l
- $B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$: $|x - x_0| < \delta$ (norma del vettore)

Def. Si dice che $f(x)$ è continua in x_0 se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Domanda: quali funzioni sono continue e dove?

RISPOSTA Tutte le funzioni ottenute a partire da quelle elementari mediante oper. algebriche e/o composizioni sono continue dove non presentano pbm. burocratici (denominatori che si annullano, log. di roba ≤ 0, ...)

Esempio 1

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x e^{xy} + \cos(x^2 y)}{e^{x-3y} + \sin(yx)} = 1 \quad \ddot{\smile}$$

[Ho sostituito $(x,y) = (0,0)$ e ho visto che era tutto tranquillo]

Tutti i criteri, tipo
- → confronto
- → Carabinieri
- → teo. algebrici

funzionano come ad Analisi 1.

Esempio 2 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ [$\frac{0}{0}$ ⇝ abbiamo un problema ⁇]

Dico che il limite esiste e fa 0. Lo dimostro con il trucco del valore assoluto

> se $|f(x)| \to 0$ da qualche parte
> allora $f(x) \to 0$ dalla stessa parte

$$0 \le \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| = |y| \cdot \frac{x^2}{x^2+y^2} \le |y|$$

$\frac{x^2}{x^2+y^2} \le 1$

$0 \le \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| \to 0$ per i Carabinieri

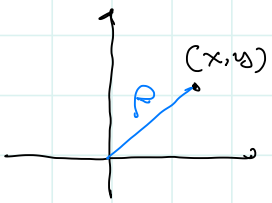
$|y| \to 0$ perché non ci sono problemi

2° modo Uso coord. polari: $x = \rho\cos\theta \quad y = \rho\sin\theta$

$$0 \le \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| = \frac{\rho^3|\cos^2\theta\cdot\sin\theta|}{\rho^2} = \rho\underbrace{|\cos^2\theta\cdot\sin\theta|}_{\le 1} \le \rho$$

$0 \to 0$ $\quad \rho \to 0$

Dire che $(x,y)\to(0,0)$ come vettore EQUIVALE a dire che $\rho \to 0$



Ancora una volta si chiude con il valore assoluto.

[Pbm. con coordinate polari: vedi Es. 2 di Algebra Lineare nell'Archivio Didattico].

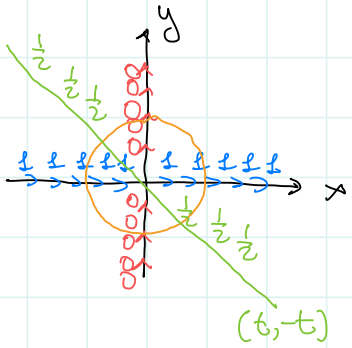
ANALISI 2 – LEZIONE 03

Esempio 1 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$ [$\frac{0}{0}$ ⇝ qualcosa occorre fare]

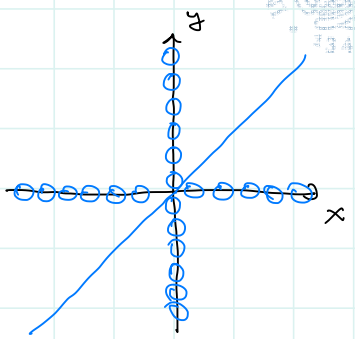
SLOGAN: ad Analisi 2 i limiti NON hanno nessuna voglia di esistere

Come dimostro che un limite non esiste?
Trovo due cammini distinti che tendono al punto in questione sui quali la funzione ha 2 limiti diversi

$$f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$$


y
x
1
1
1

Esempio 2 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^2+y^4}$ [$\frac{0}{0}$ e gradi non chiaramente]



Mandiamo avanti la esplorazione

$\lim_{t\to 0} f(0,t) \equiv 0 \qquad \lim_{t\to 0} f(t,0) = 0$

$\lim_{t\to 0} f(t,t) = \lim_{t\to 0} \dfrac{t^3}{t^2+t^4} = 0$

$\lim_{t\to 0} f(t,mt) = \lim_{t\to 0} \dfrac{mt^3}{t^2+m^4t^4} = 0$

(m: coeff. ang. retta generica)

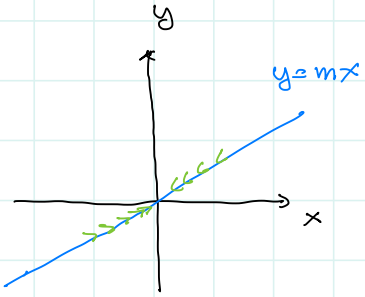
Su tutte le rette il limite fa 0. Forse fa davvero 0, ma DEVO DIMOSTRARLO.

Rifaccio il trucco del valore assoluto:

$$0 \le \left|\frac{x^2y}{x^2+y^4}\right| = |y| \underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^4}}_{\le 1} \le |y|$$

Concludo con i carabinieri.

Esempio 3 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$



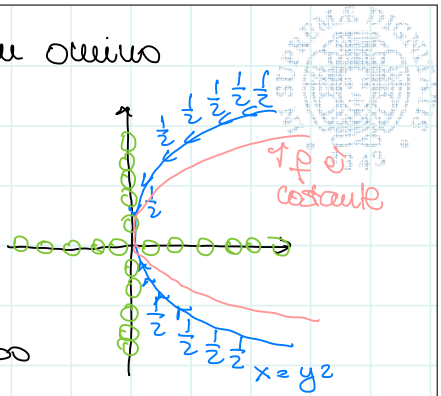
$\lim_{t\to 0} f(0,t) = \lim_{t\to 0} f(t,0) = 0$ (assi)

$\lim_{t\to 0} f(t,mt) = \lim_{t\to 0} \dfrac{m^2t^3}{t^2+m^4t^4} = 0$ (retta $y=mx$)

Come prima verrebbe da dire che il limite è 0 E INVECE... non esiste !!!!

Per dimostrare la NON esistenza considero un cammino del tipo (t^2, t)

$$\lim_{t\to 0} f(t^2,t) = \lim_{t\to 0} \frac{t^4}{t^4+t^4} = \frac{1}{2}$$


$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$

Se voglio usare le coordinate polari per dire che il limite fa 0, devo arrivare a scrivere

$$0 \leq |f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)| \leq \boxed{g(\rho)}$$

$g(\rho)$ indipendente da θ e tende a 0 quando $\rho \to 0$.

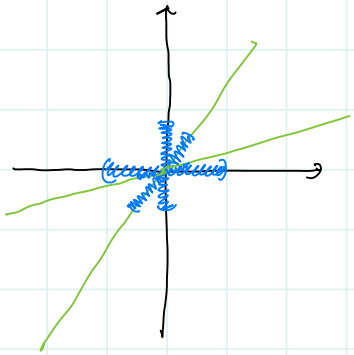
Differenza tra Analisi 1 e 2.

Supponiamo che su tutte le rette lim = 0.

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Su ogni retta

$$-\varepsilon \leq f(x,y) \leq \varepsilon$$

se (x,y) sono abbastanza vicini a $(0,0)$



Non è vero che unendo gli intervallini ottengo una pallina centrata in $(0,0)$

ANALISI 2 – LEZIONE 04

DERIVATE E DIFFERENZIALE IN PIÙ VARIABILI

Analisi 1 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in \mathbb{R}$

Def (derivata) La funz. f è **derivabile** in x_0 se esiste in $\mathbb{R}$ il

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$ [rapporto incrementale]

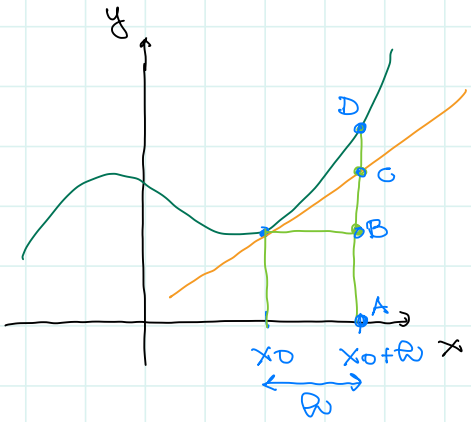
Def (differenziale) La funz. f è **differenziabile** in x_0 se esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \alpha h + o(h) \quad \text{per } h \to 0$$

Teorema ① f è derivabile in $x_0 \iff f$ è diff. in x_0
(e in tal caso $\alpha = f'(x_0)$)

② f è deriv. in $x_0 \Rightarrow f$ continua in x_0

[In generale NON vale il viceversa]



$AD = AB + BC + CD$ (da interpretare come segue)

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot h + o(h)$$

$f'(x_0)\cdot h$: tende a 0 linearmente in h

$o(h)$: tende a 0 più velocemente di h

Analisi 2 → Derivate parziali
→ Derivate direzionali
→ Gradiente
→ Differenziale

Setting: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ $\qquad$ $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in \mathbb{R}^n$

Derivate parziali Se esiste

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \in \mathbb{R}$$

allora si dice che esiste la <u>derivata parziale</u> di f in (x_0, y_0) rispetto alla variabile x. Si indica con

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \qquad f_x(x_0, y_0) \qquad D_x f(x_0, y_0)$$

Analogamente

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = D_x f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Nel caso generale di $f(x_1, \dots, x_n)$ si pone

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) = f_{x_k}(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h e_k) - f(x_0)}{h}$$

e_k: k-esimo vettore base canonica

$h e_k$: prodotto numero per vettore

<u>Oss</u>. La definizione di derivata parziale coinvolge un limite in UNA SOLA VARIABILE (h è un numero !!!)

Derivate direzionali $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in \mathbb{R}^n$

$v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

↑ Direzione

La derivata in x_0 rispetto alla direzione v si definisce come

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \lim_{\rho \to 0} \frac{f(x_0 + \rho v) - f(x_0)}{\rho}$$

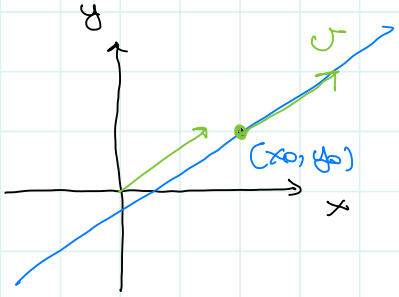
posto che il lim esista e sia reale.

In $\mathbb{R}^2$ se il punto è (x_0, y_0) e $v = (v_1, v_2)$, allora

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = \lim_{\rho \to 0} \frac{f(x_0 + \rho v_1, y_0 + \rho v_2) - f(x_0, y_0)}{\rho}$$

Oss. Alcuni definiscono $\frac{\partial f}{\partial v}$ solo per direzioni v con $\|v\| = 1$.

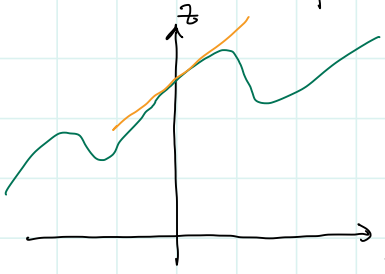
Oss. Le derivate parziali sono speciali derivate direzionali, ottenute prendendo come v uno dei vettori della base canonica.



Interpretazione geometrica

$x_0 + \rho v$, al variare di ρ, è la retta che passa per x_0 e ha direzione data da v

Posso considerare l'omino $x_0 + tv$: questo si troverà al tempo t alla quota $f(x_0 + tv)$



La derivata direzionale è la derivata di questa funzione per $t = 0$.

Gradiente Il gradiente di f in x_0 è il vettore n-dimensionale che ha come componenti le derivate parziali in x_0.
Si indica con $\nabla f(x_0)$ (↑ NABLA)

Ad esempio in $\mathbb{R}^2$ si ha

$$\nabla f(x_0, y_0) = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))$$

Differenziale La funzione $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice differenziabile in $x_0 \in \mathbb{R}^n$ se esiste $\alpha \in \mathbb{R}^n$ tale che

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \langle \alpha, h \rangle + o(\|h\|) \quad \text{per } h \to 0$$

($x_0 + h$: vettore; h: vettore incremento; $\langle \alpha, h \rangle$: prod. scalare; $\|h\|$: norma di un vettore)

In $\mathbb{R}^2$, chiamato il punto (x_0, y_0) ($\vec{x_0}$, componenti) e posto (h, k) ($\vec{h}$, componenti) l'incremento

la formula diventa (ponendo $(\alpha, \beta) = \vec{\alpha}$)

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \alpha h + \beta k + o\left(\sqrt{h^2 + k^2}\right) \quad \text{per } (h, k) \to (0, 0)$$

($f(x_0, y_0)$: costante; $\alpha h + \beta k$: lineare nell'incremento $\vec{h} = (h, k)$)

LIMITE IN 2 VARIABILI QUINDI DI ANALISI 2 DI QUELLI CHE HANNO POCA VOGLIA DI ESISTERE!

Oss. brutale Nelle derivate parziali / direzionali stiamo facendo incrementi in una sola direzione, nel differenziale ci muoviamo contemporaneamente in TUTTE LE DIREZIONI

ANALISI 2 – LEZIONE 05

Teorema Supponiamo che $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sia diff. in x_0.
Allora valgono i seguenti fatti

(1) f è continua in x_0,

(2) esistono le derivate parziali e sono le componenti di α (quindi $\alpha = \nabla f(x_0)$)

(3) esistono tutte le derivate direzionali in x_0 e sono date dalla formula

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \langle \nabla f(x_0), v \rangle$$

Nota bene: (2) è un caso speciale di (3).

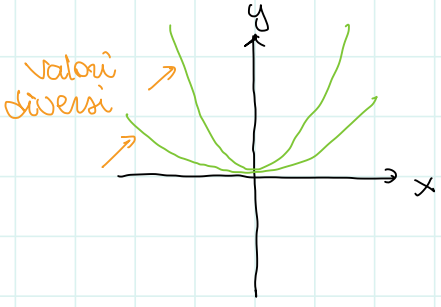
Brutta notizia Può succedere che in x_0 esistano tutte le derivate direzionali MA f non sia nemmeno continua in x_0.

L'ESEMPIO

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{x^2 y}{x^4+y^2}\right)^2 & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Verifichiamo che f NON è continua in $(0,0)$ Andiamo sulle parabole prendendo (t, mt^2):

$$f(t, mt^2) = \left(\frac{mt^4}{t^4 + m^2 t^4}\right)^2 = \frac{m^2}{(1+m^2)^2}$$ che dipende da m!



Calcolo la derivata direzionale in $(0,0)$ con direzione $v = (\alpha, \beta)$

Devo fare

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{f(\rho\alpha, \rho\beta) - \overbrace{f(0,0)}^{0}}{\rho} = \lim_{\rho \to 0} \left(\frac{\alpha^2 \beta \rho^3}{\alpha^4 \rho^4 + \beta^2 \rho^2} \right)^2 \cdot \frac{1}{\rho} = 0$$

$$= \lim_{\rho \to 0} \frac{\alpha^4 \beta^2 \rho^6}{\beta^4 \rho^4 + o(\rho^4)} \cdot \frac{1}{\rho} = 0$$

Quindi tutte le derivate direzionali sono nulle.

— o — o —

Dimostriamo che f diff. in $x_0 \Rightarrow$ esistono derivate direzionali e vale la formula

Ipotesi: $f(x_0 + \rho) = f(x_0) + \langle \alpha, \rho \rangle + o(\|\rho\|)$ per $\rho \to 0$

Tesi

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} = \langle \alpha, v \rangle$$

Dall'ipotesi segue che

$$f(x_0 + \overbrace{tv}^{\rho}) = f(x_0) + \underbrace{\langle \alpha, tv \rangle}_{t\langle \alpha, v \rangle} + o(\underbrace{\|tv\|}_{|t| \cdot \|v\|})$$

da cui

$$\frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} = \frac{t\langle \alpha, v \rangle + o(|t| \cdot \|v\|)}{t}$$

$$= \langle \alpha, v \rangle + \frac{o(|t| \cdot \|v\|)}{t}$$

Resta solo da dimostrare che l'ultimo pezzo tende a 0.

$$\frac{o(|t| \cdot \|v\|)}{t} = \boxed{\frac{o(|t| \cdot \|v\|)}{|t| \cdot \|v\|}} \boxed{\frac{|t| \cdot \|v\|}{t}}$$

$\boxed{\frac{|t| \cdot \|v\|}{t}}$ limitato $= \pm \|v\|$ a seconda del segno di t

$\boxed{\frac{o(|t| \cdot \|v\|)}{|t| \cdot \|v\|}} \to 0$ per def. di o piccolo

— o — o —

La stessa formula ci dice che le componenti di α sono le derivate parziali.

Significato geometrico del gradiente e piano tangente

Domanda: fissato x_0, qual è il vettore v con $\|v\| = 1$ per cui la derivata direzionale è max / min ?

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \langle \nabla f(x_0), v \rangle = \underbrace{\|\nabla f(x_0)\|}_{\text{fisso}} \cdot \underbrace{\|v\|}_{1} \cdot \underbrace{\cos\theta}_{\text{angolo compreso}}$$

questa è max quando $\cos\theta = 1$, cioè $\theta = 0$, cioè v ha la stessa direzione di $\nabla f(x_0)$.
Analogamente, è min quando $\cos\theta = -1$, cioè $\theta = 180°$, cioè v e $\nabla f(x_0)$ hanno stessa direzione, ma verso opposto.

Quindi un ometto che si trova in (x_0, y_0)
- sale al max se va nella direzione data da $\nabla f(x_0, y_0)$
- scende " " " " $-\nabla f(x_0, y_0)$

PIANO TANGENTE

Analisi 1 $\quad f(\underbrace{x_0+h}_{x}) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot h + o(h)$

$$f(x) = \boxed{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)} + o(x-x_0)$$

eq. retta tangente
(passa per $(x_0, f(x_0))$ e ha coeff. angolare $f'(x_0)$)

Analisi 2 $\quad f(\underbrace{x_0+h}_{x}, \underbrace{y_0+k}_{y}) = f(x_0) + f_x(x_0,y_0)h + f_y(x_0,y_0)k + o(\dots)$

$$= \boxed{f(x_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)} + o(\dots)$$

Equazione piano tangente

In n variabili l'equazione del "iperpiano tangente" è del tipo

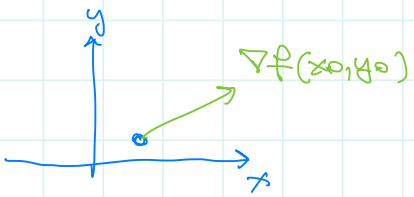
$$f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle$$

BRUTALMENTE Dove ad Analisi 1 c'erano le derivate, ora ad Analisi 2 c'è il gradiente.

Dove pensiamo al gradiente?

→ geometricamente sono i coeff. del piano tangente scritto come $z =$ qualcosa

→ "dinamicamente" = direzione in cui si sale o scende di più sul grafico.



ANALISI 2 – LEZIONE 06

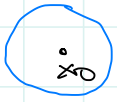
In pratica: → come stabilisco se f è differenziabile? (1)
→ come calcolo le derivate parziali? (2)
→ " " " " direzionali? (3)

Risposta (3): se so che f è diff. in x_0, uso formula $\langle \nabla f(x_0), v \rangle$
altrimenti occorre usare la definizione

Risposta alla (2): dove non ci sono problemi, uso le regole di derivazione come ad Analisi 1.
Altrimenti uso la definizione.

Risposta alla (1): o uso la definizione o spero nel seguente teo.

TEOREMA DEL DIFFERENZIALE TOTALE



Supponiamo che tutte le derivate parziali
→ esistano in tutta una pallina centrata in x_0
→ siano continue in x_0.
Allora f è differenziabile in x_0.

Esempi di calcolo di derivate parziali

$f(x,y) = 3x + y^2$

$f_x(x,y) = 3$ [faccio finta che
$f_y(x,y) = 2y$ l'altra variabile sia costante]

$f(x,y) = xy + x^2y^3$

$f_x(x,y) = y + y^3 \cdot 2x = y + 2xy^3$
$f_y(x,y) = x + x^2 \cdot 3y^2 = x + 3x^2y^2$

$f(x,y) = x \cos y$

$f_x(x,y) = \cos y$
$f_y(x,y) = x(-\sin y) = -x \sin y$

$f(x,y) = x \sin(xy)$ $\quad f_x(x,y) = \sin(xy) + xy\cos(xy)$, $\quad f_y(x,y) = x^2\cos(xy)$

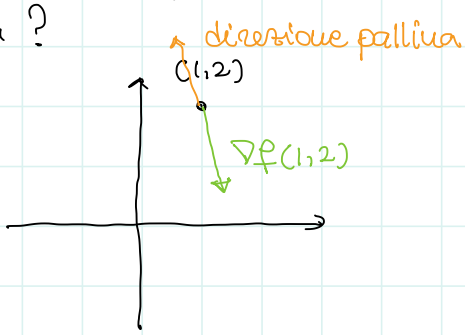
$f(x,y,z) = e^{xz}\log(xy)$ $\quad f_x(x,y,z) = z e^{xz}\log(xy) + e^{xz}\frac{1}{x}$, $\quad f_y(x,y,z) = e^{xz}\cdot\frac{1}{y}$, $\quad f_z(x,y,z) = x e^{xz}\log(xy)$

$f(x,y) = \frac{x^2}{y^3}$ $\quad f_x(x,y) = \frac{2x}{y^3}$, $\quad f_y(x,y) = -3x^2\frac{1}{y^4}$

$f(x,y) = x^y$ $\quad f_x(x,y) = y\cdot x^{y-1}$, $\quad f_y(x,y) = x^y\cdot\log x$

Oss. Dove non ci sono problemi, tutte le funzioni precedenti sono differenziabili.

Esempio della pallina Consideriamo $f(x,y) = x^2 - y^3 + 3y$ e mettiamo una pallina nel p.to del grafico sopra $(1,2)$. In che direzione si muoverà la pallina?

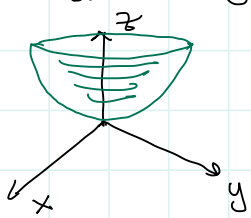


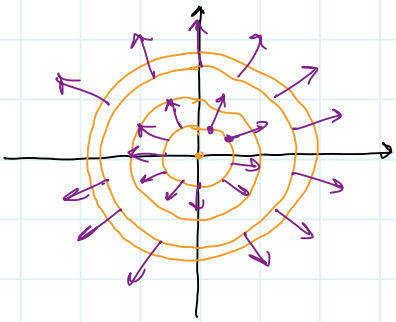
$\nabla f(x,y) = (2x, -3y^2+3)$

$\nabla f(1,2) = (2,-9)$

Oss. geometrica Il gradiente è sempre $\perp$ alle linee di livello

$f(x,y) = x^2+y^2$ $\quad \nabla f = (2x,2y)$

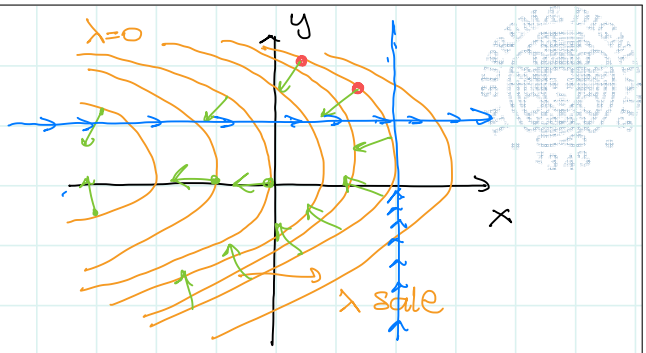




$f(x,y) = x + y^2$

Linee di livello: $x + y^2 = \lambda$

$x = \lambda - y^2$

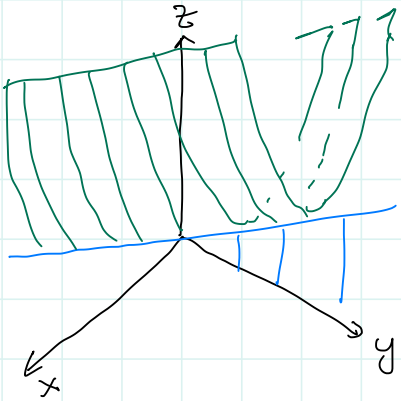


$\nabla f(x,y) = (1, 2y)$

→ = direzione pallina ($= -\nabla f(x_0)$)

Percorso di omini Gli omini a y fisso si muovono su rette

" " " x fisso " su parabole



ANALISI 2 – LEZIONE 07

MAX-MIN per funzioni di più variabili

Analisi 1 Setting: data $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, trovare

$$\max_{\min} \{ f(x) : x \in [a,b] \}$$ ← sono dei "valori", cioè "delle y"

da non confondere con i p.ti di max / min ← sono "delle x"

Teorema (WEIERSTRASS) Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua
è importante avere gli estremi

allora max e min esistono.

E come / dove li trovo? I candidati p.ti di max / min rientrano in una delle seguenti 3 categorie

① p.ti stazionari interni, cioè i p.ti $x_0 \in (a,b)$ t.c. $f'(x_0) = 0$
↑ senza ↑ estremi

② p.ti singolari interni, cioè i p.ti $x_0 \in (a,b)$ t.c. $f'(x_0)$ non esiste

③ p.ti di bordo cioè $x_0 = a$ e $x_0 = b$.

Operativamente
→ determino i p.ti delle 3 categorie, avendo così i candidati
→ li sostituisco tutti nella funzione e scopro dove vale di più o di meno.

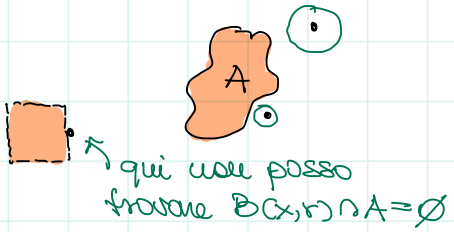
Oss. Il problema diventa più complicato se invece di $[a,b]$ ho insiemi più complicati, magari non limitati

— o — o —

Road map: → insiemi COMPATTI
→ teo. Weierstrass
→ metodi per trattare il bordo

Def. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un sottoinsieme, o più in generale $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

- Si dice che A è **limitato** se esiste $R > 0$ tale che
$$A \subseteq B(0,R)$$
(brutalmente: A è contenuto in una palla con centro nell'origine e raggio opportuno)
- si dice che A è **chiuso** se (brutalmente: contiene tutto il suo bordo) per ogni $x \notin A$ esiste $r > 0$ t.c.
$$B(x,r) \cap A = \emptyset$$

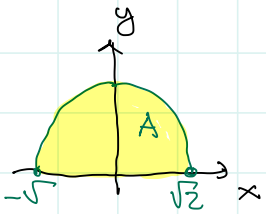


- Si dice che A è COMPATTO se è contemporaneamente chiuso e limitato.

Idea brutale Gli insiemi compatti giocano in $\mathbb{R}^n$ lo stesso ruolo che giocavano in $\mathbb{R}$ gli intervalli con estremi.

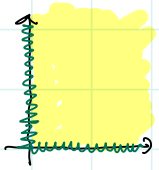
Esempi in $\mathbb{R}^2$

- $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 2,\ y \geq 0\}$ è compatto
(dentro il cerchio; sopra asse x)



A contiene il suo bordo perché nelle condizioni è compreso l'uguale

- $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0\}$ = primo quadrante
→ è CHIUSO
→ NON è limitato e quindi NON è compatto.



Teorema (Weierstrass) Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme e sia $f: A \to \mathbb{R}$ una funzione.

Supponiamo che
(i) f è continua
(ii) A è compatto.
Allora esistono per forza

$$\max_{\min} \{ f(x) : x \in A \}$$

← sono dei numeri, in $\mathbb{R}^2$ sarebbero delle z

(x: vettori)

Attenzione! Il teo. è una condizione SUFFICIENTE ma non necessaria. Se una delle hp, o entrambe, non sono verificate, max e min possono esistere comunque.

Dove cerco i pti di max / min? Nelle seguenti 3 categorie

① pti **STAZIONARI INTERNI** cioè pti x_0 interni all'insieme A, quindi non sul bordo, dove $\nabla f(x_0) = 0$ ← sistema di n equ. in n incognite

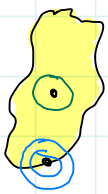
② pti **SINGOLARI INTERNI** cioè pti x_0 interni ad A, dove f è non differenziabile (speriamo che non ci siano)

③ pti del **BORDO** di A (che saranno in numero infinito).

Operativamente: si calcolano i candidati delle 3 categorie e poi si sostituiscono in f per vedere dove vale di più o di meno.

Precisazione → x_0 si dice interno ad A se esiste $r>0$ t.c. $B(x_0, r) \subseteq A$

→ x_0 si dice sul bordo di A se per ogni $r>0$ la pallina $B(x_0, r)$ interseca sia A, sia il complementare di A



Perché i p.ti di max / min stanno in una delle 3 categorie?

→ se stanno sul bordo, bene

→ se sono interni e $\nabla f(x_0)$ non esiste, bene

→ resta il caso in cui x_0 è INTERNO ad A e $\nabla f(x_0)$ esiste.

In questo caso devo dimostrare che $\nabla f(x_0) = 0$.

Usiamo gli assiii. Considero l'assiii

$x_0 + t e_k$

↑ k-esimo vettore base canonica

Consideriamo

$t \to f(x_0 + t e_k)$ = quota a cui si trova l'assiii che percorre la retta

Se x_0 era un p.to di max / min per f, allora $t=0$ è un p.to di max / min per questa funzione, quindi per Analisi 1 la derivata di questa funzione si annulla per $t=0$.

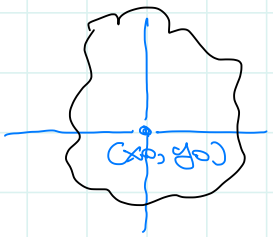
Ma la derivata di questa funzione è proprio $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0)$.

Quindi in x_0 si annullano tutte le derivate parziali, e quindi il gradiente.

— o — o —

Oss. Dove abbiamo usato che x_0 è interno ad A?

Lo abbiamo usato perché abbiamo bisogno di poterci muovere da x_0 in tutte le direzioni



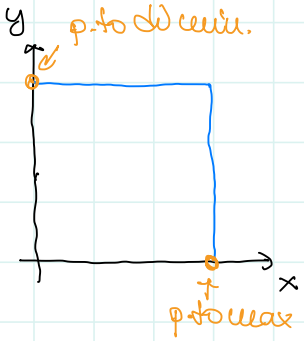
— o — o —

ANALISI 2 – LEZIONE 08

Come trovare max/min di funzioni su insiemi compatti

① Disuguaglianze elementari } si trattano solo casi particolarmente semplici
② Linee di livello
③ Seguire la procedura standard con i p.ti delle 3 categorie.
Per il bordo ci sono due tecniche
3.1 Parametrizzazione del vincolo
3.2 Moltiplicatori di LAGRANGE

Esempio 1 $A = [0,1] \times [0,1]$ $f(x,y) = x - 2y$
Per W max e min esistono

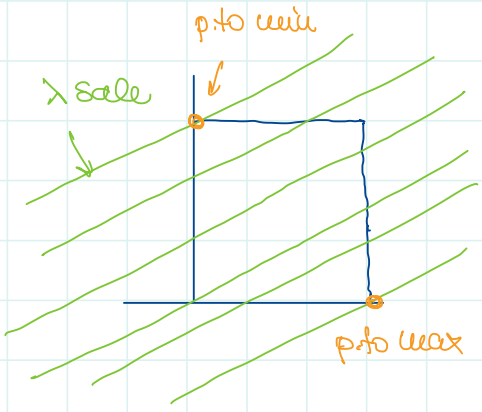


① $x - 2y \leq 1 - 0 = 1$ MAX
↑ prendo x più grande possibile, y più piccolo possibile

e vale il segno di = se e solo se $x = 1$ e $y = 0$.
Quindi $(1,0)$ è il p.to di max

② $x - 2y \geq 0 - 2 = -2$ con = se e solo se $x = 0$ e $y = 1$.
Quindi -2 è il min e $(0,1)$ è il p.to di min

In alternativa potevamo tracciare le linee di livello
$f(x,y) = \lambda$, $x - 2y = \lambda$
$2y = x - \lambda$, $y = \frac{1}{2}x - \frac{\lambda}{2}$



Esempio 2 $A = [0,2] \times [-1,3] \times [0,1]$ (parallelepipedo in $\mathbb{R}^3$)

$f(x,y,z) = 2x + 3y - 5z$

Max: $f(x,y,z) \leq 4 + 9 - 0 = 13$ p.to max: $(2,3,0)$

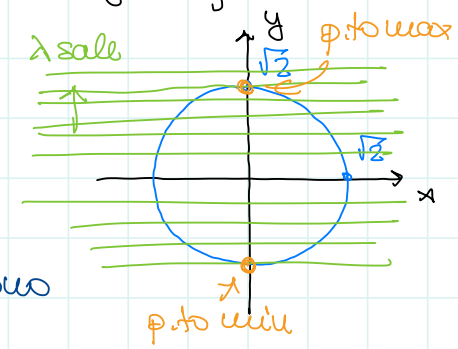
Min: $f(x,y,z) \geq 0 - 3 - 5 = -8$ p.to min: $(0,-1,1)$

$g(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^3$

Max: $g(x,y,z) \leq 4 - 0 + 1 = 5$ p.to max: $(2,0,1)$

Min: $g(x,y,z) \geq 0 - 9 + 0 = -8$ p.to min: $(0,3,0)$

Esempio 3 $f(x,y) = y$ $\quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\}$

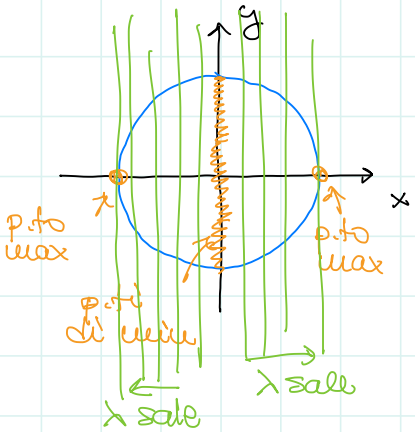


Max $= \sqrt{2}$ p.to di max: $(0,\sqrt{2})$

Min $= -\sqrt{2}$ p.to di min: $(0,-\sqrt{2})$

Ulteriore conferma: le linee di livello sono le rette // all'asse x

$g(x,y) = x^2$



Max $= 2$ p.ti di max: $(\pm\sqrt{2}, 0)$

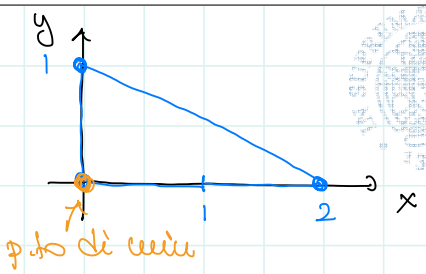
Min $= 0$ p.ti di min: infiniti punti dell'asse y che stanno in A

Per controllo: le linee di livello

$x^2 = \lambda \rightsquigarrow x = \pm\sqrt{\lambda}$

Esempio 4 $f(x,y) = x+y$

A = triangolo con vertici in $(0,0), (2,0), (0,1)$



Per W. max e min. esistono

Min $f(x,y) \geq 0+0 = 0$ p.to di min: $(0,0)$

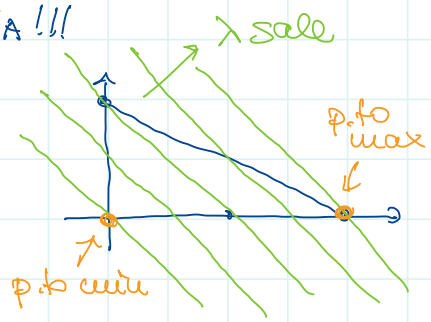
Max $f(x,y) \leq 2+1 = 3$ vero, ma non posso realizzare l'uguale!! Infatti dovrei prendere $x=2$ e $y=1$, ma $(2,1) \notin A$.

Quindi 3 NON è il max.

CON LE DISUGUAGLIANZE NON SI ARRIVA!!!

Usiamo le linee di livello: $x+y=\lambda$

$y = \lambda - x$



Max: 2 p.to di max: $(2,0)$.

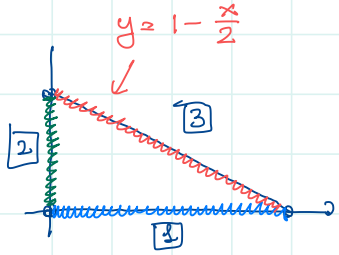
Alternativa: usare la procedura completa

① Stazionari interni $\nabla f(x,y) = (1,1)$ NON si annulla mai: $\emptyset$

② Singolari interni: $\emptyset$

③ Bordo: fatto da 3 pezzi

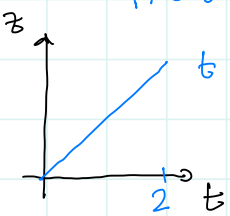
Parametrizzo i 3 pezzi



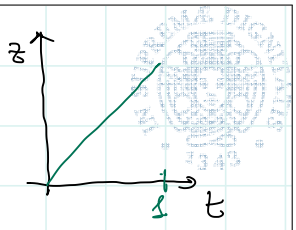
[1] $(t,0)$ con $0 \leq t \leq 2$

Sostituisco in f e trovo

$\varphi_1(t) = f(t,0) = t$ (altezza a cui si trova un omino che percorre il tratto [1])

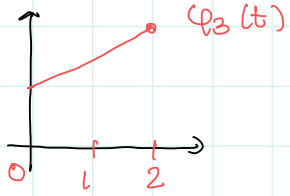


2 $(0,t)$ con $0 \le t \le 1$ $\quad \varphi_2(t) = f(0,t) = t$



3 $(t, 1-\frac{t}{2})$ con $0 \le t \le 2$

$\varphi_3(t) = f(t, 1-\frac{t}{2}) = t + 1 - \frac{t}{2} = 1 + \frac{t}{2}$



Morale: su tutti e 3 i tratti del bordo, max e min stanno agli estremi, quindi i 3 candidati da sostituire sono i 3 vertici del triangolo

→ $f(0,0) = 0$ ← min

→ $f(2,0) = 2$ ← max

→ $f(0,1) = 1$

ANALISI 2 — LEZIONE 09

MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE (Caso di 1 moltiplicatore in $\mathbb{R}^2$)

Def. Sia $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione. Si dice **luogo di zeri** di g l'insieme

$$V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 0\}$$

Brutalmente: V sarà il bordo dell'insieme, o un pezzo del bordo, e $g(x,y)=0$ sarà "l'equazione del bordo".

Obiettivo: trovare i candidati ad essere p.ti di max/min di una certa funzione $f(x,y)$ in V.

Teorema (Un moltiplicatore in $\mathbb{R}^2$) Siano $f(x,y)$ e $g(x,y)$ due funzioni differenziabili e con derivate parziali continue.
Sia V il luogo di zeri di g.
Allora i candidati ad essere p.ti di max/min di f in V rientrano nelle seguenti due categorie.

① **Soluzioni del 2° sistema** cioè p.ti (x,y) in cui

$$g(x,y) = 0 \quad \text{e} \quad \nabla g(x,y) = 0$$

Diventa un sistema di 3 equ. in 2 incognite

$$\begin{cases} g_x(x,y) = 0 \\ g_y(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

[Brutalmente: spesso non ha soluzione perché ci sono + incognite che equazioni]

[Attenzione! Non è un sistema lineare]

② **Soluzioni del 2° sistema** cioè i punti di V, quindi $g(x,y)=0$, in cui ∇f e ∇g sono paralleli, cioè $\nabla f = \lambda \nabla g$

↑ MOLTIPLICATORE

$$\begin{cases} f_x(x,y) = \lambda g_x(x,y) \\ f_y(x,y) = \lambda g_y(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

Sistema di 3 equ. in 3 incognite x, y, λ quindi in generale ci aspettiamo che ci siano soluzioni

Operativamente: → scrivo l'insieme come luogo di zeri
→ Risolvo i due sistemi (c'è tanto precorso)
→ I p.ti (x,y) trovati (gli eventuali λ li dimentico) sono i candidati cercati.

Esempio 1 $f(x,y) = x - 3y$

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 4\}$

Per W. max e min. esistono. Li cerco nelle 3 categorie

① Stac. int. $\nabla f(x,y) = (1,-3)$ non si annulla mai $\rightsquigarrow \emptyset$

② Sing. int. $\rightsquigarrow \emptyset$

③ Bordo I p.ti del bordo verificano $\underbrace{x^2+y^2-4}_{g(x,y)} = 0$

Applico metodo moltiplicatori, risolvendo i 2 sistemi

2° sistema

$$\begin{cases} g_x = 0 \\ g_y = 0 \\ g = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \\ x^2+y^2-4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$ incompatibili con la 3ª

Quindi il 1° sistema NON HA SOLUZIONI

Oss. on the road: max e min esistono, quindi per forza devono venire fuori dal 2° sistema

2° sistema $\quad f_x = \lambda g_x \quad f_y = \lambda g_y \quad g = 0$ $\quad \begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ -3 = 2\lambda y \\ x^2+y^2 = 4 \end{cases}$

Primo modo di risolvere:

→ ricavo x e y dalle prime 2 equazioni $\quad x = \frac{1}{2\lambda} \quad y = -\frac{3}{2\lambda}$

(potevo dividere per λ essendo questo $\neq 0$, altrimenti le prime due equ. non vanno bene)

→ sostituisco nella 3ª e trovo

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{9}{4\lambda^2} = 4 \rightsquigarrow 10 = 16\lambda^2 \rightsquigarrow \lambda^2 = \frac{10}{16} \rightsquigarrow \lambda = \pm\frac{\sqrt{10}}{4}$$

Quindi abbiamo trovato due soluzioni

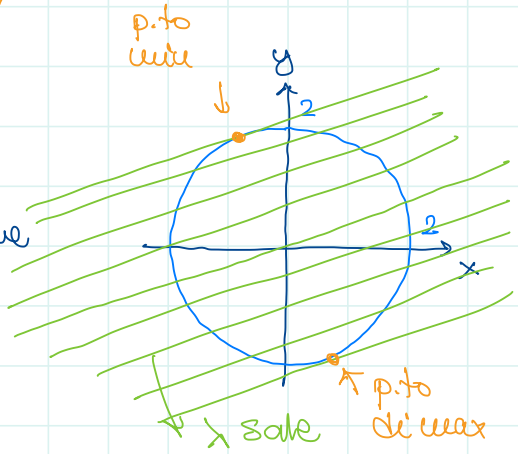
$$(x,y) = \left(\frac{2}{\sqrt{10}}, -\frac{6}{\sqrt{10}}\right) \qquad (x,y) = \left(-\frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{6}{\sqrt{10}}\right)$$

che saranno i p.ti di max / min.

Basta sostituire nella funzione

$$f\left(\frac{2}{\sqrt{10}}, -\frac{6}{\sqrt{10}}\right) = \frac{20}{\sqrt{10}} = 2\sqrt{10} \leftarrow \text{MAX}$$

$$f\left(-\frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{6}{\sqrt{10}}\right) = -2\sqrt{10} \leftarrow \text{MIN}$$



Controlliamo con le linee di livello che il risultato sia ragionevole

$$x - 3y = \lambda \rightsquigarrow 3y = x - \lambda \rightsquigarrow y = \frac{x}{3} - \frac{\lambda}{3}$$

Secondo modo di risolvere il sistema $\quad \begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ -3 = 2\lambda y \\ x^2+y^2 = 4 \end{cases}$

→ Moltiplico la 1ª equ. per y e la seconda per x

$$y = 2\lambda x y$$
$$-3x = 2\lambda x y$$

sottraendo trovo $y = -3x$, che sostituisco nella 3ª equ.

$$x^2 + 9x^2 = 4 \rightsquigarrow 10x^2 = 4 \rightsquigarrow x^2 = \frac{4}{10} \rightarrow x = \pm\frac{2}{\sqrt{10}}$$
$$\rightsquigarrow y = \mp\frac{6}{\sqrt{10}}$$

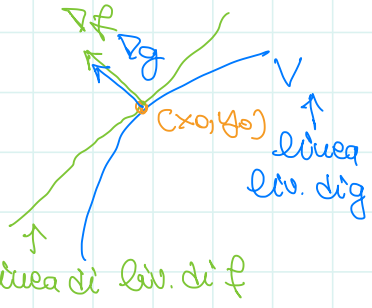
↑ cioè + sopra, cioè − sotto.

—o—o—

Di solito la difficoltà è risolvere il sistema

—o—o—

Almeno geometricamente, perché funziona il metodo.
Torniamo all'esempio precedente.
Pensando alle linee di livello, stiamo cercando i p.ti in cui l'insieme V è TANGENTE alle linee di livello di f. La seconda oss. è che V è una linea di livello di g. Quindi nei p.ti di max/min abbiamo una linea di livello di g che è tangente ad una linea di livello di f.



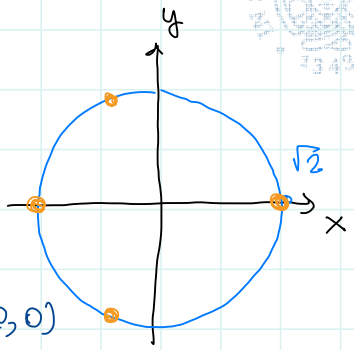
Ora le linee di livello di f sono $\perp$ a ∇f
" " " g " " ∇g

Quindi in (x_0, y_0) i gradienti di f e di g sono allineati, in quanto $\perp$ alla stessa roba.
Quindi ∇f e ∇g sono uno multiplo dell'altro, quindi abbiamo una soluz. del 2° sistema
"stare in V" " ∇ uno multiplo dell'altro"
Essere multipli ha poco senso se uno è nullo, e i casi in cui accade sono nel 1° sistema.

ANALISI 2 – LEZIONE 10

Esempio 1 $f(x,y) = x - y^2$

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 2\}$



W. $\Rightarrow$ max e min esistono

① Staz. interni : $\emptyset$ $\quad \nabla f(x,y) = (1,-2y) \neq (0,0)$

② Sing. interni : $\emptyset$

③ Bordo : moltiplicatori $\quad g(x,y) = x^2+y^2-2$

1° sistema

$g_x = 0 \quad 2x = 0$

$g_y = 0 \quad 2y = 0$ $\Rightarrow$ NESSUNA SOLUZ.

$g = 0 \quad x^2+y^2 = 2$

2° sistema

$f_x = \lambda g_x$

$f_y = \lambda g_y$

$g = 0$

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ -y = 2\lambda y \\ x^2+y^2 = 2 \end{cases}$$

← NON PENSARE NEMMENO DI SEMPLIFICARE y

$y(\lambda+1) = 0$ 2ª equ.

$y = 0$ $\qquad \lambda = -1$

3ª equ. $\quad$ 1ª equ.

$x^2 = 2 \qquad x = -\frac{1}{2}$

$x = \pm\sqrt{2}$ $\qquad$ 3ª equ

$y^2 = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4} \rightsquigarrow y = \pm\frac{\sqrt{7}}{2}$

$(\sqrt{2},0)$ $\quad (-\sqrt{2},0)$ $\quad \left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$ $\quad \left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$

Sostituisco nella funzione

$f(\sqrt{2},0) = \sqrt{2}$

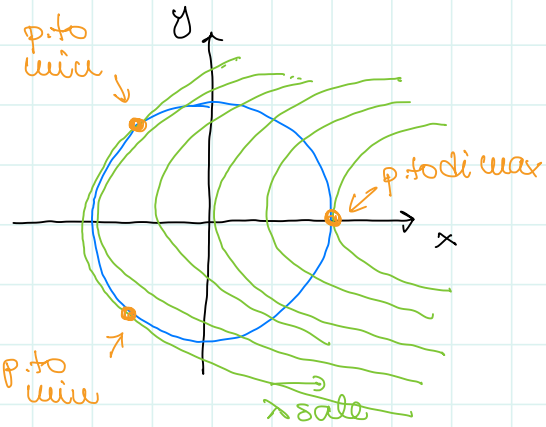
$f(-\sqrt{2},0) = -\sqrt{2}$

$f\left(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{7}}{2}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{7}{4} = -\frac{9}{4}$

Conclusione

Max $= \sqrt{2}$ p.to max: $(\sqrt{2},0)$

Min $= -\frac{9}{4}$, pti di min: $\left(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$



Verifica con linee di livello

$x - y^2 = \lambda \rightsquigarrow x = y^2 + \lambda$

Si poteva risolvere parametrizzando il bordo?

Certamente sì. Una param. è

$(\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\sin t)$ con $0 \le t \le 2\pi$

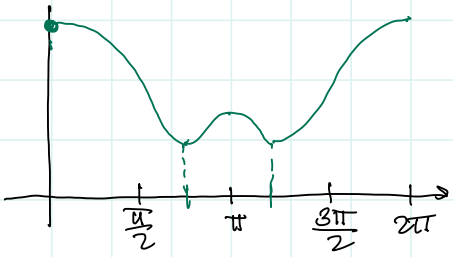
($\sqrt{2}$: raggio)

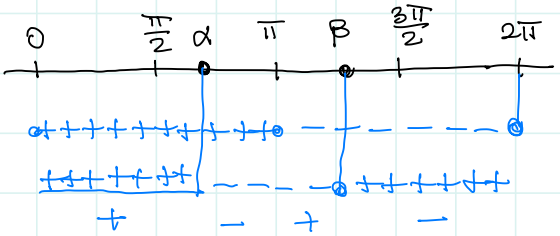
$\varphi(t) = f(\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\sin t) = \sqrt{2}\cos t - 2\sin^2 t$

e questa la studio per $0 \le t \le 2\pi$

$\varphi'(t) = -\sqrt{2}\sin t - 4\sin t\cos t = -\sin t\,(\sqrt{2} + 4\cos t) = 0$

$\cos t = -\frac{\sqrt{2}}{4}$





Si vede che il max si ottiene per $t = 0$ o $t = 2\pi$ e viene $\sqrt{2}$

Il minimo si ottiene per $t = \alpha$ e per $t = \beta$.

Quanto vale? $\sqrt{2}\cos\alpha - 2\sin^2\alpha = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) - 2\left(1 - \frac{1}{8}\right)$

$= -\frac{1}{2} - 2\cdot\frac{7}{8} = -\frac{1}{2} - \frac{7}{4} = -\frac{9}{4}$ ☺

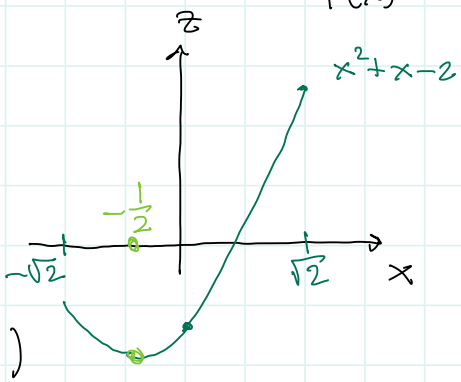
3° modo $f(x,y) = x - y^2$ $\quad x^2+y^2 = 2$ $\quad y^2 = 2 - x^2$

Sostituzione del vincolo: sull'insieme V (cioè dove $x^2+y^2=2$) vale che $x - y^2 = x + x^2 - 2$

Quindi fare max / min di $x-y^2$ equivale a fare max / min di $x+x^2-2$ che dipende solo da x.

Ora in V x varia in $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, quindi studio $\underbrace{x^2+x-2}_{\varphi(x)}$ in quell'intervallo !!

$\varphi'(x) = 2x+1 \qquad \varphi'(x) = 0 \iff x = -\frac{1}{2}$



Quindi abbiamo

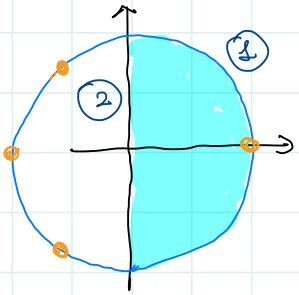
→ max per $x = \sqrt{2}$ (quindi $y=0$)

→ min per $x = -\frac{1}{2}$ (quindi $y = \pm\frac{\sqrt{7}}{2}$)

e si conclude allo stesso modo.

Esempio 2 $f(x,y) = x - y^2$

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 2,\ x \ge 0\}$



Tutto come prima fino al bordo, che ora è fatto da 2 pezzi.

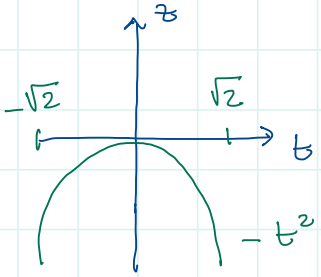
Trattiamo separatamente i 2 pezzi di bordo

① Moltiplicatori $\rightsquigarrow$ $(\sqrt{2}, 0)$ ~~$(-\sqrt{2}, 0)$~~ ~~$(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{7}}{2})$~~

Non sono accettabili perché non hanno $x \ge 0$

② Essendo un segmento lo parametrizzo $(0,t)$ con $-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$

$\varphi(t) = f(0,t) = -t^2$



In questo tratto abbiamo

max per $t=0$ $\rightsquigarrow$ $(0,0)$

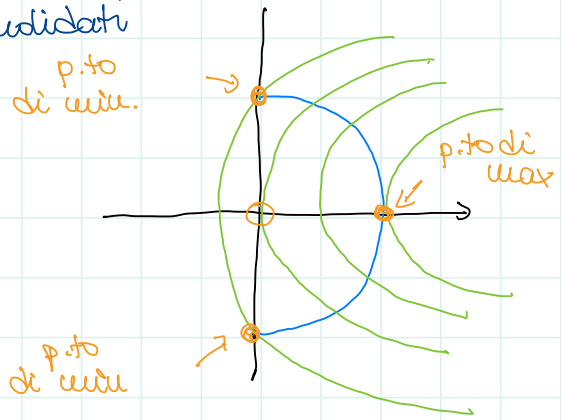
min per $t=\pm\sqrt{2}$ $\rightsquigarrow$ $(0,\pm\sqrt{2})$

Ancora una volta abbiamo 4 candidati

$f(\sqrt{2},0) = -\sqrt{2}$ $\leftarrow$ max

$f(0,0) = 0$

$f(0,\pm\sqrt{2}) = -2$ $\leftarrow$ min



Regola generale: quando il bordo è fatto da due pezzi, occorre includere tra i candidati gli estremi dei vari pezzi, che possiamo chiamare
→ bordi dei bordi
→ punti di taglio

ANALISI 2 – LEZIONE 11

Più moltiplicatori di Lagrange (due moltiplicatori in $\mathbb{R}^3$)

Si applica quando vogliamo fare max/min su un insieme del tipo

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{\phi(x,y,z) = 0,\ \psi(x,y,z) = 0}_{\text{due equazioni}}\}$$

Brutalmente: V è l'intersezione di due superfici, quindi un oggetto 1-dimensionale

I candidati pti di max/min stanno in 2 categorie

Soluzioni del 1° sistema Cerchiamo i pti di V in cui

$\nabla\phi$ e $\nabla\psi$ sono linearmente dipendenti

cioè la matrice $\begin{pmatrix} \phi_x & \phi_y & \phi_z \\ \psi_x & \psi_y & \psi_z \end{pmatrix}$ ha RANGO ≤ 1

cioè i 3 minori 2×2 si annullano. Il primo sistema è quindi

$$\begin{cases} \phi_y\psi_z - \phi_z\psi_y = 0 \\ \phi_x\psi_z - \phi_z\psi_x = 0 \\ \phi_x\psi_y - \phi_y\psi_x = 0 \\ \phi = 0 \\ \psi = 0 \end{cases}$$

Sistema di 5 equazioni in 3 incognite, quindi molto spesso non ha soluzioni

Soluzioni del 2° sistema Cerco i punti di V in cui

$$\nabla f = \lambda \nabla\phi + \mu \nabla\psi$$

(λ, μ: MOLTIPLICATORI)

(cioè ∇f è comb. lineare di $\nabla\phi$ e $\nabla\psi$)

Il secondo sistema è quindi

$$\begin{cases} f_x = \lambda \phi_x + \mu \psi_x \\ f_y = \lambda \phi_y + \mu \psi_y \\ f_z = \lambda \phi_z + \mu \psi_z \\ \phi = 0 \\ \psi = 0 \end{cases}$$

Sistema di 5 equ. in 5 incognite (x, y, z, λ, μ) quindi in genere ci aspettiamo soluzioni.

Esempio 1 $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - z$

$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = 2,\ x^2 + y^2 - z = 0\}$

L'insieme A è compatto? Chiuso lo è (perché ci sono gli =)
Resta da capire se è limitato.

SI Dall'eq. $x^2 + z^2 = 2$ otteniamo che $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ e $z \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$
Ora dall'altra equ. $y^2 = z - x^2$ e quindi y^2 è limitato
e da questo otteniamo una limit. su y. Più precisamente
$y^2 = z - x^2 \leq \sqrt{2} \quad \rightsquigarrow \quad y \in [-\sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{2}]$.
Ora sappiamo che max / min esistono per W.

Applichiamo ora la procedura: V non ha parte interna, perché è una specie di curva, quindi non ha senso cercare pti stazionari o singolari interni. Quindi V è "solo bordo".

$f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - z$ $\quad \phi(x,y,z) = x^2 + z^2 - 2$
$\psi(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$

2° sistema $\begin{pmatrix} \nabla\phi \\ \nabla\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 0 & 2z \\ 2x & 2y & -1 \end{pmatrix}$

Per avere rango ≤ 1 serve che $xy = 0 \quad -2x - 4xz = 0$
$yz = 0$

$$\begin{cases} xy = 0 \\ yz = 0 \\ x(1+2z) = 0 \\ x^2+z^2 = 2 \\ x^2+y^2-z = 0 \end{cases}$$

$xy = 0$

- $x = 0$ → 4ª → $z = \pm\sqrt{2}$ → 2ª → $y = 0$ → 5ª non funziona
- $y = 0$ → $x(1+2z) = 0$
  - $x = 0$ → come prima
  - $z = -\frac{1}{2}$ → $x^2 = 2 - \frac{1}{4}$ (4ª, 5ª) → $x^2 = \frac{1}{2}$ → Non funziona

2° sistema

$$\begin{cases} 2x = 2\lambda x + 2\mu x \\ 4y = 2\mu y \\ -1 = 2\lambda z - \mu \\ x^2+z^2 = 2 \\ x^2+y^2-z = 0 \end{cases}$$

2ª equ: $y(2-\mu) = 0$

- $y = 0$ → 5ª equ → $z = x^2$ → 4ª equ → $x^2+x^4 = 2$, $x^4+x^2-2 = 0$, $(x^2+2)(x^2-1) = 0$ → $x = \pm 1$ → $(\pm 1, 0, 1)$
- $\mu = 2$ → 1ª equ → $x = \lambda x + 2x$; $x(\lambda+1) = 0$
  - $x = 0$ → 4ª equ → $z = \pm\sqrt{2}$ → 5ª equ → $y^2 = z = \pm\sqrt{2}$ → $(0, \pm\sqrt[4]{2}, \sqrt{2})$ → $y^2 = z - x^2 = -\frac{1}{2} - \frac{7}{4} = -\frac{9}{4}$ → Nessuna soluzione
  - $\lambda = -1$ → 3ª equ → $-1 = -2z - 2$, $2z = -1$, $z = -\frac{1}{2}$ → 4ª equ → $x^2 = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$, $x = \pm\frac{\sqrt{7}}{2}$ → 5ª equ e troviamo y^2

Alla fine i candidati sono 4 e basta sostituirli nella funzione

$f(\pm 1, 0, 1) = 1 - 1 = 0$ ← min.

$f(0, \pm\sqrt[4]{2}, \sqrt{2}) = 0 + 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$ ← max

Idea alternativa

$f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - z$

$\Phi(x,y,z) = x^2 + z^2 - 2$

$\psi(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$ $\rightsquigarrow$ $y^2 = z - x^2$

Nell'insieme A si ha $f(x,y,z) = x^2 - z + 2z - 2x^2$

$= z - x^2$

Quindi fare max/min di $f(x,y,z)$ è equivalente a fare max/min di $z - x^2$ o anche di y^2.

In questi casi i conti sono più semplici in quanto alcune derivate si annullano.

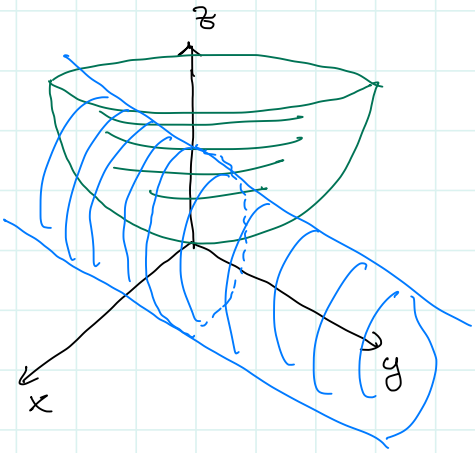
Come è fatto l'insieme A?

Cosa rappresenta $x^2 + z^2 = 2$

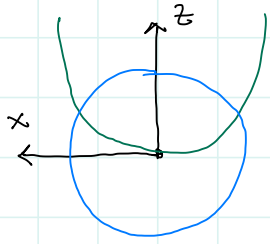
CILINDRO che ha come asse l'asse y e come "base" la circ. $x^2 + z^2 =$

$z = x^2 + y^2$

paraboloide



A è l'intersezione tra paraboloide e cilindro



ANALISI 2 – LEZIONE 12

Back to esercizio precedente: $f(x,y,z) = x^2+2y^2-z$

$\phi(x,y,z) = x^2+z^2-2 = 0 \to x^2 = 2-z^2$

$\psi(x,y,z) = x^2+y^2-z = 0 \to y^2 = z-x^2$

$$f(x,y,z) = 2-z^2+2(z-x^2)-z$$
$$= 2-z^2+2z-2x^2-z = 2-z^2+2z-2(2-z^2)-z$$
$$= z^2+z-2$$

Quindi posso fare max/min di z^2+z-2, ma con quali vincoli?

$x^2+z^2=2 \rightsquigarrow z^2 = 2-x^2 \rightsquigarrow z^2 \le 2 \rightsquigarrow z \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

$x^2+y^2-z=0 \rightsquigarrow 2-z^2+y^2-z=0 \rightsquigarrow y^2 = \underbrace{z^2+z-2}_{\text{radici } -2 \text{ e } 1} \ge 0$

$z \le -2$ oppure $z \ge 1$

Quindi intersecando resta $z \in [1, \sqrt{2}]$ su cui dobbiamo studiare z^2+z-2

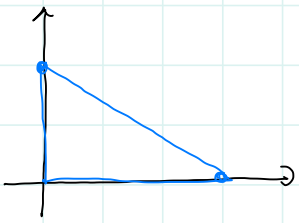
minimo per $z=1 \rightsquigarrow$ trovo x

massimo per $z=\sqrt{2} \rightsquigarrow$ ey.

Max/min con valori assoluti

$f(x,y) = |x+y-1|$

A = triangolo con vertici $(0,0), (3,0), (0,2)$



Problema con il valore assoluto: c'è il rischio di avere p.ti singolari dove si annulla.

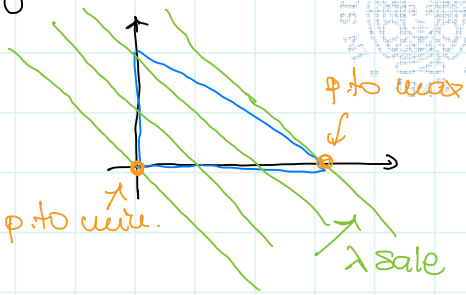
Procedura consigliata:

→ studio il pbm. SENZA val. assol.

→ traggo le conclusioni pensando che le zone del grafico con $z<0$ si ribaltano.

Facciamo max/min di $x+y-1$ sul triangolo

$x+y-1=\lambda \rightsquigarrow y=1+\lambda-x$



P.to di max: $(3,0)$ $\quad$ $\max=2$

P.to di min: $(0,0)$ $\quad$ $\min=-1$

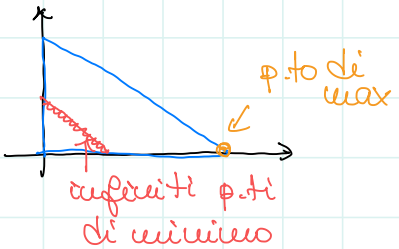
Quando ribalto le parti negative, il -1 diventa 1, che quindi parte dal 2.

Più in generale: se $f(x,y)$ ha max positivo A e min negativo $-B$

allora per il max di $|f(x,y)|$ se la giocano A e B.

Essendo un valore assoluto, il minimo è dove vale 0, se esistono p.ti nell'insieme in cui f si annulla.

Nel nostro caso tutti i p.ti con $x+y=1$ sono p.ti di min



Esempio 2 $\quad f(x,y)=|x+y-2|$

Solito triangolo.

Senza valore assoluto: $\max=1$ con p.to max $(3,0)$

$\min=-2$ con p.to min $(0,0)$

Con il valore assoluto: per il max se la giocano 1 e 2 (vecchio min ribaltato)

Quindi ora $\max=2$ con p.to di max $(0,0)$

$\min=0$ con ∞ p.ti di min.

Esempio 3 Solito triangolo con $f(x,y) = |x+y-7|$

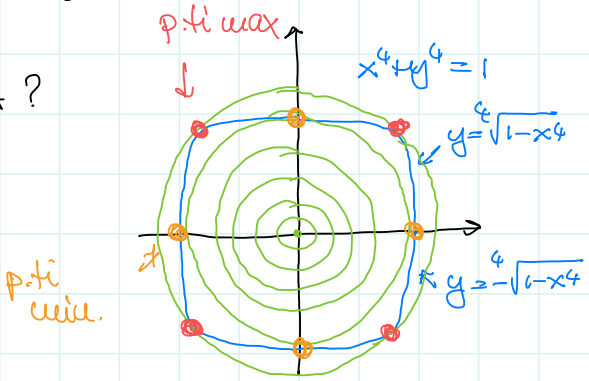
Senza val. assol.: max $= -4$ con p.to max $= (3,0)$
min $= -7$ " " min $= (0,0)$

Con il valore assoluto: min $= 4$ con p.to min $= (3,0)$
max $= 7$ con p.to di max $= (0,0)$

Achtung! Il fatto che ci sia un valore assoluto non dice che per forza il minimo è 0 !!!!

Esempio 4 $f(x,y) = x^2+y^2$
$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4+y^4 = 1\}$

Domanda: come è fatto l'insieme A ?
È una specie di circ. deformata
Non è difficile veder che



$$\sqrt[4]{1-x^4} \overset{?}{\geq} \underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{\text{circonferenza}}$$

$$1-x^4 \overset{?}{\geq} (1-x^2)^2 = 1+x^4-2x^2 \iff 2x^4-2x^2 \leq 0 \iff x^2(x^2-1) \leq 0$$

ok se $x \in [-1,1]$ ☺

L'insieme è compatto ed è "solo bordo", quindi basta fare i moltiplicatori con $f(x,y) = x^2+y^2$ e $\phi(x,y) = x^4+y^4-1$

sistema
$$\begin{cases} \phi_x = 0 \\ \phi_y = 0 \\ \phi = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x^3 = 0 \\ 4y^3 = 0 \\ x^4+y^4 = 1 \end{cases} \rightsquigarrow \text{impossibile}$$

2 sistema $\quad f_x = \lambda \phi_x \quad\quad 2x = 4\lambda x^3$

$f_y = \lambda \phi_y \quad\quad 2y = 4\lambda y^3$

$\phi = 0 \quad\quad x^4 + y^4 = 1$

Cosa NON fare: semplificare x nella 1ª e y nella 2ª

Moltiplico la 1ª per y^3, la seconda per x^3 e sottraggo

$$2xy^3 - 2yx^3 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad xy(x^2 - y^2) = 0$$

Si aprono 3 possibilità

- $x = 0 \rightsquigarrow y = \pm 1 \rightsquigarrow (0, \pm 1)$
- $y = 0 \rightsquigarrow x = \pm 1 \rightsquigarrow (\pm 1, 0)$
- $x^2 = y^2 \rightsquigarrow x^4 = y^4 \rightsquigarrow x^4 = y^4 = \frac{1}{2} \rightsquigarrow \left(\pm \frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \right)$

4 punti, perché i segni sono indipendenti

Sostituendo gli 8 pti abbiamo finito.

ANALISI 2 – LEZIONE 13

Limiti all'infinito in più variabili

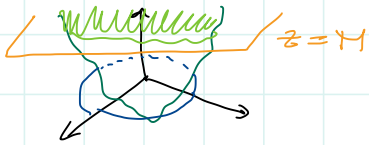
Analisi 1 $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

Analisi 2 Andremo a definire $\lim_{x^2+y^2 \to +\infty} f(x,y)$

o più in generale $\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x)$ ← Norma

Come al solito abbiamo 4 possibilità: $\ell \in \mathbb{R}, +\infty, -\infty$, N.E.

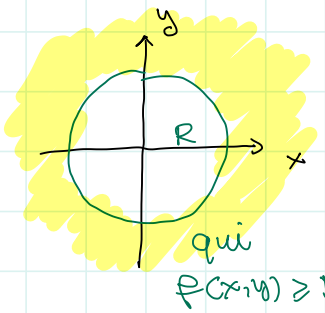
- Diciamo che $\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$ se



$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists R > 0 \quad \text{t.c.} \quad f(x) \geq M \quad \forall x \text{ con } \|x\| \geq R$$

↑ anche enorme

È il solito "gioco": noi fissiamo M e la funzione trova $B(0,R)$ tale che fuori da $B(0,R)$ si ha $f(x) \geq M$
Se noi fissiamo M più grande, la funzione ce la fa comunque, magari con un R più grande.



- Diciamo che $\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = -\infty$ se

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists R > 0 \quad \text{t.c.} \quad f(x) \leq M \quad \forall x \text{ con } \|x\| \geq R$$

↑ anche negativo enorme

- Diciamo che $\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists R \geq 0 \quad \text{t.c.} \quad |f(x) - l| \leq \varepsilon \quad \forall x \text{ con } \|x\| \geq R$$

↑ anche molto vicino a 0

- Il limite non esiste (e la cosa capita spesso) se non ricadiamo in nessuno dei casi precedenti.

Operativamente

→ per dimostrare che un limite NON ESISTE basta trovare due curve che vanno all'infinito sui quali la funzione si comporta in modo diverso

→ per dimostrare che esiste non bastano gli esempi, e bisogna usare opportuni strumenti

Esempio 1 $\lim_{x^2+y^2 \to +\infty} x^2 + y^2 - 6x$

L'idea è che tenda a $+\infty$. Passiamo in coord. polari

$$f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \rho^2 - 6\rho\cos\theta \geq \rho^2 - 6\rho$$

Ora dire che $x^2+y^2 \to +\infty$ è equivalente a dire che $\rho \to +\infty$, quindi dobbiamo calcolare

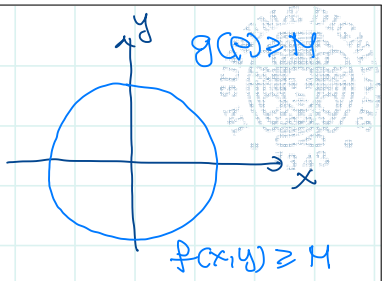
$$\lim_{\rho \to +\infty} (\rho^2 - 6\rho) = +\infty \quad \text{(analisi 1)}$$

Per confronto la nostra funzione, che è più grande, tende a $+\infty$.

Fatto generale 1 Se $f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \geq g(\rho)$ e (a dx dipende solo da ρ)
$g(\rho) \to +\infty$ per $\rho \to +\infty$, allora

$$\lim_{x^2+y^2 \to +\infty} f(x,y) = +\infty$$

Per convincersene, basta pensare alla dim.
Dato $M \in \mathbb{R}$, esiste ρ_0 t.c. $g(\rho) \geq M$
quando $\rho \geq \rho_0$, ma allora $f(x,y) \geq M$
quando $x^2+y^2 \geq \rho_0^2$



Esempio 2 $\lim_{x^2+y^2 \to +\infty} \dfrac{y}{x^2+y^2+1}$

L'idea è che tenda a 0.

Proviamo con trucco del valore assoluto + coordinate polari

$$0 \leq |f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)| = \frac{\rho|\sin\theta|}{\rho^2+1} \leq \frac{\rho}{\rho^2+1}$$

$0 \leq |f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)| \to 0$ per i carabinieri

$\dfrac{\rho}{\rho^2+1} \to 0$ quando $\rho \to +\infty$

Fatto generale 2 Se vale una diseg. del tipo

$$g_1(\rho) \leq f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \leq g_2(\rho)$$

è importante che i due laterali NON dipendono da θ

e

$$\lim_{\rho\to+\infty} g_1(\rho) = \lim_{\rho\to+\infty} g_2(\rho) = \ell \quad \text{(stesso } \ell \text{ a dx e sx)}$$

allora $\lim_{x^2+y^2\to+\infty} f(x,y) = \ell$

Fatto generale 3 Se vale $f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \leq g(\rho)$

e

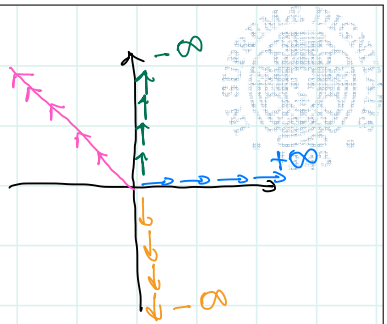
$$\lim_{\rho\to+\infty} g(\rho) = -\infty,$$

allora anche

$$\lim_{x^2+y^2\to+\infty} f(x,y) = -\infty.$$

Esempio 3 $\lim_{x^2+y^2\to+\infty} x^2-3y^2$

↑ spinge a $+\infty$ — ↑ spinge a $-\infty$



In questo caso il limite NON ESISTE

$\lim_{t\to+\infty} f(0,t) = \lim_{t\to+\infty} -3t^2 = -\infty$

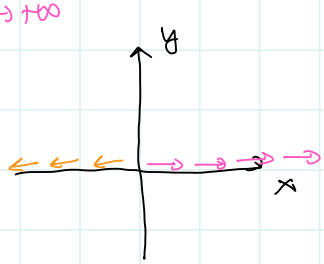
$\lim_{t\to+\infty} f(t,0) = \lim_{t\to+\infty} t^2 = +\infty$

Potevo usare anche altri limiti, ad esempio

$\lim_{t\to-\infty} f(0,t) = \lim_{t\to-\infty} -3t^2 = -\infty$

$\lim_{t\to+\infty} f(-t,t) = \lim_{t\to+\infty} t^2-3t^2 = \lim_{t\to+\infty} -2t^2 = -\infty$

Esempio 4 $\lim_{x^2+y^2\to+\infty} x+2y^2$



$\lim_{t\to+\infty} f(t,0) = \lim_{t\to+\infty} t = +\infty$

$\lim_{t\to-\infty} f(t,0) = \lim_{t\to-\infty} t = -\infty$

Esempio 5 $\lim_{x^2+y^2\to+\infty} x^4+2y^4-7x^2y-\arctan(xy)$

L'idea è che tenda a $+\infty$. Proviamo a passare in coord. polari cercando una stima dal basso con una $g(\rho)\to+\infty$

$$f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) = \rho^4(\cos^4\theta+2\sin^4\theta) - 7\rho^3\cos^2\theta\sin\theta - \arctan(\rho^2\cos\theta\sin\theta)$$

$$\geq \rho^4\underbrace{(\cos^4\theta+2\sin^4\theta)}_{\text{devo liberarmi di questo}} - 7\rho^3 - \frac{\pi}{2}$$

SOLITO DISCORSO La funzione $\varphi(\theta) = \cos^4\theta + 2\sin^4\theta$ è continua, dunque per W. di analisi 1 ammette un minimo per $\theta \in [0, 2\pi]$. Tale minimo è il valore assunto in un certo $\theta_0 \in [0, 2\pi]$, dunque è strettamente > 0 perché $\cos^4\theta_0$ e $\sin^4\theta_0$ non possono essere entrambi nulli.

In conclusione

$$\exists\, m_0 > 0 \text{ t.c. } \cos^4\theta + 2\sin^4\theta \geq m_0 \quad \forall \theta \in [0, 2\pi]$$

Abbiamo così dimostrato che

$$f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \geq m_0\rho^4 - 7\rho^3 - \frac{\pi}{2}$$

Essendo $m_0 > 0$, sappiamo che questa funzione DELLA SOLA ρ tende a $+\infty$ quando $\rho \to +\infty$ (per analisi 1)

Quindi per il fatto generale è anche il limite iniziale fa $+\infty$.

— o — o —

ANALISI 2 LEZIONE 14

Solito esempio 1 $\lim_{x^2+y^2\to+\infty} x^8+y^4-7x^4y^2$

Passiamo in coord. polari

$$f(\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta) = \rho^8\cos^8\vartheta + \rho^4\sin^4\vartheta - 7\rho^6\cos^4\vartheta\sin^2\vartheta$$

Brutal mode: $\sim \rho^8 + \rho^4 - 7\rho^6 \to +\infty$ perché vince ρ^8

MA il coeff. di ρ^8 può essere nullo

MA se il coeff. di ρ^8 è 0, allora anche quello di ρ^6 è 0, quindi resta solo ρ^4 che comunque tende a $+\infty$.

Detto meglio:

→ se $\cos\vartheta \neq 0$, allora il limite è $+\infty$ perché c'è ρ^8

→ se $\cos\vartheta = 0$, allora $\sin\vartheta = \pm 1$, quindi resta ρ^4, che tende comunque a $+\infty$.

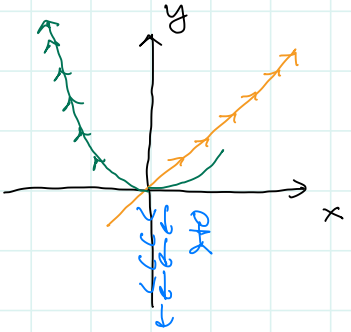
In ogni caso il limite è $+\infty$.

QUELLO CHE HO DETTO È SPAZZATURA

Sostanzialmente ho fatto il limite sulle rette pensando ϑ fisso. Invece avrei dovuto liberarmi di ϑ facendo la disuguaglianza !!!

In realtà il limite non esiste

$$x^8+y^4-7x^4y^2$$



$\lim_{t\to-\infty} f(0,t) = \lim_{t\to-\infty} t^4 = +\infty$

$\lim_{t\to+\infty} f(0,-t) = \dots = +\infty$

$\lim_{t\to+\infty} f(t,t) = \lim_{t\to+\infty} t^8+t^4-7t^6 = +\infty$

$\lim_{t\to-\infty} f(t,t^2) = \lim_{t\to-\infty} t^8+t^8-7t^8 = -\infty$

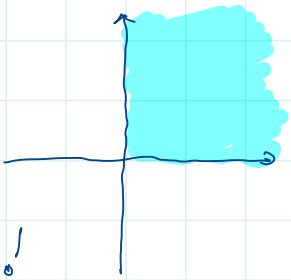
LIMITI SU DOMINI RISTRETTI Quando la funzione non la pensiamo definita su tutto $\mathbb{R}^2$

Esempio 2 $\lim_{x^2+y^2 \to +\infty} x+y$ (qui penso su tutto $\mathbb{R}^2$)

$\lim_{\substack{x^2+y^2 \to +\infty \\ x \geq 0,\, y \geq 0}} x+y$ ↑ qui la funzione è pensata solo sul 1° quadrante

Il primo limite non esiste. Ad esempio

$\lim_{t \to +\infty} f(0,t) = +\infty$ $\lim_{t \to -\infty} f(0,t) = -\infty$



Se la funz. è definita solo sul 1° quadrante non possiamo usare $(0,t)$ con $t \to -\infty$

In effetti il secondo limite esiste e fa $+\infty$! Lo dimostriamo in coord. polari

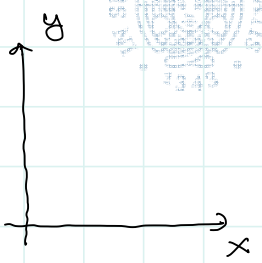
$$f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \rho(\cos\theta+\sin\theta) \geq m_0 \rho \to +\infty$$

Solito discorso: $\varphi(\theta) = \cos\theta+\sin\theta$ ha minimo per $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ e tale minimo è un certo $m_0 > 0$ (per $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ siamo nel 1° quadrante sinθ e cosθ sono ≥ 0 ma non entrambi 0 contemporaneamente).
Ora si conclude come sempre.

Oss. Per $\theta \in [0, 2\pi]$ è ancora vero che $\cos\theta+\sin\theta \geq m_0$, ma ora m_0 è negativo e dalla stima non segue nulla di furbo.

Oss. Nel 2° e 4° quadrante il limite non esiste (ovvio!) nel 3° quadrante è $-\infty$.

Esempio 3 $\lim_{\substack{x^2+y^2\to+\infty \\ x\geq 0,\ y\geq 0}} xy$ $\qquad$ $\lim_{\substack{x^2+y^2\to+\infty \\ x\geq 1,\ y\geq 1}} xy$



Il $\lim$ non esiste poiché

$$\lim_{t\to+\infty} f(t,0) = 0, \qquad \lim_{t\to+\infty} f(t,t) = +\infty$$

Variante 1-bis: $\lim_{\substack{x^2+y^2\to+\infty \\ x>0,\ y>0}} xy$

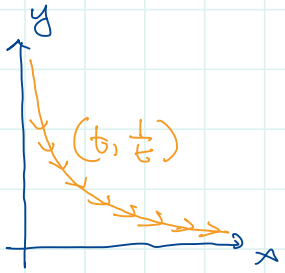
l'unico $(t,0)$ NON FUNZIONA PIÙ

Lo possiamo sostituire con

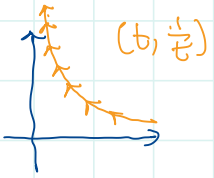
$$\lim_{t\to+\infty} f(t,1) = \lim_{t\to+\infty} t = +\infty$$ 😀

$$\lim_{t\to+\infty} f\left(t,\frac{1}{t^2}\right) = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} = 0$$ 😀

oppure $\lim_{t\to+\infty} f\left(t,\frac{1}{t}\right) = \lim_{t\to+\infty} 1 = 1$ 😀

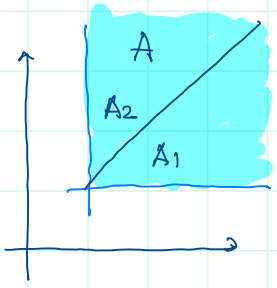


Quello che deve tendere a $+\infty$ è $x^2+y^2 = t^2+\frac{1}{t^2}$.



Andava bene anche $\lim_{t\to 0^+} f\left(t,\frac{1}{t}\right) = 1$

Il secondo limite, imponendo $x\geq 1$ e $y\geq 1$, esclude anche questi nuovi ostacoli
Ora il limite esiste e fa $+\infty$!!!
Chiamiamo A questa zona. Dico che



$$xy \geq \frac{1}{2}(x+y) \qquad \forall (x,y)\in A$$

Se questo è vero, allora per confronto

$\lim_{\substack{x^2+y^2\to+\infty \\ (x,y)\in A}} xy \geq \frac{1}{2} \lim_{\substack{x^2+y^2\to+\infty \\ (x,y)\in A}} x+y = +\infty$

ξ $+\infty$

↑ Lo faccio pure su tutto il 1° quadrante, quindi a maggior ragione lo faccio su A che è + piccolo

Come si dimostra la disuguaglianza?

$$xy = \frac{1}{2}xy + \frac{1}{2}xy \geq \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}x$$

↑ uso che $x \geq 1$ ↑ uso che $y \geq 1$

Procedimento alternativo. Pongo $x = u+1$, $y = v+1$.
In questo modo ci siamo ridotti a fare il limite

$\lim_{\substack{u^2+v^2\to+\infty \\ u\geq 0,\, v\geq 0}} (u+1)(v+1) = \lim \ldots [uv+u+v+1]$

$\geq \lim_{\substack{u^2+v^2\to+\infty \\ u\geq 0,\, v\geq 0}}$ ↗ rinuncio a roba ≥ 0

$(u+v) = +\infty$

↑ siamo su tutto il 1° quadrante come in esempio precedente

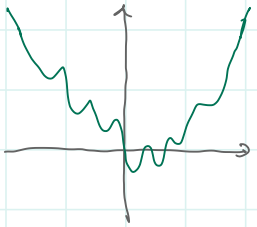
— o — o —

ANALISI 2 — LEZIONE 15

Teorema di Weierstrass generalizzato

Analisi 1 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Supponiamo che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$



Allora esiste per forza $\min\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$.

Analisi 2 Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua. Supponiamo che

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$$

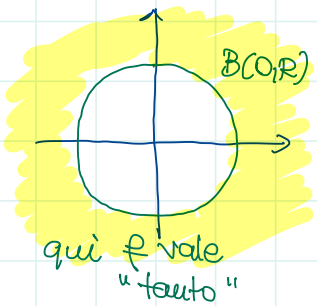
Allora esiste per forza $\min\{f(x) : x \in \mathbb{R}^n\}$

posso mettere qualunque cosa ≥ 0

Dim. Applichiamo la def. di limite con $M = f(0) + 1$ (0 origine di $\mathbb{R}^n$)

Troviamo $R > 0$ tale che

$$\forall x \text{ con } \|x\| \geq R \text{ vale } f(x) \geq f(0) + 1$$



Ora consideriamo l'insieme $\|x\| \leq R$. Questo è un compatto, quindi esiste per W classico

$$m = \min\{f(x) : \|x\| \leq R\}.$$

Dico che in realtà m è il minimo su tutto $\mathbb{R}^n$, cioè

$$f(x) \geq m \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$ (e non solo nella palla)

Infatti ci sono due casi

- se $\|x\| \le R$, allora $f(x) \ge m$ per definizione di m
- se $\|x\| > R$, allora

$$f(x) \ge f(0) + 1 \ge f(0) \ge m$$

(per definiz. di R; perché $0 \in$ palla, e quindi contribuisce alla definiz. di m)

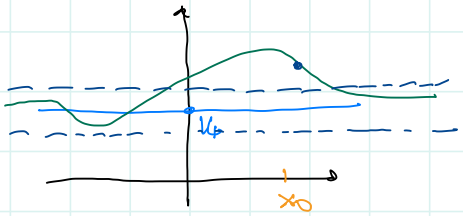
e quindi ancora una volta $f(x) \ge m$.

— o — o —

Ci sono diverse varianti sostanzialmente analoghe

- se f è continua e $\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = -\infty$, allora esiste il max
- se $f : A \to \mathbb{R}$ è continua, A è chiuso e $\lim_{\substack{\|x\| \to +\infty \\ x \in A}} f(x) = +\infty$ allora esiste il minimo in A
- se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è continua, $\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = 14$, ed esiste un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tale che $f(x_0) > 14$, allora esiste il max

(basta applicare la definiz. di limite con $\varepsilon = \frac{f(x_0) - 14}{2}$)



Esempio 1 Determinare inf e sup di

$$x^2 + 2y^2 - 6x + 8y$$

su tutto $\mathbb{R}^2$, determinando anche se si tratta di max/min.

Si vede subito che sup $= +\infty$. Basta trovare un cammino in cui f tenda a $+\infty$. Ad esempio (e quindi max non esiste)

$f(t, 0) = t^2 - 6t$ che tende a $+\infty$ quando $t \to +\infty$

(asse x in direzione positiva)

Per il minimo, dimostriamo che $\lim_{x^2+y^2\to+\infty} f(x,y) = +\infty$

Le coordinate polari

usa $6\rho\cos\vartheta \geq -6\rho$, $8\rho\sin\vartheta \geq -8\rho$

$$\rho^2\cos^2\vartheta + 2\rho^2\sin^2\vartheta - 6\rho\cos\vartheta + 8\rho\sin\vartheta \geq \rho^2(\cos^2\vartheta + 2\sin^2\vartheta) - 6\rho - 8\rho$$
$$\geq \rho^2 - 14\rho$$

quindi la tesi segue per confronto.

W. generalizzato $\Rightarrow$ il minimo esiste $\Rightarrow$ i p.ti di minimo vanno ricercati tra i p.ti stazionari

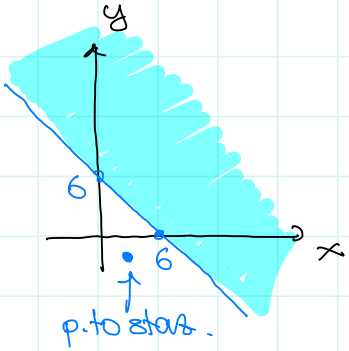
$$\nabla f(x,y) = (2x-6,\ 4y+8) = (0,0) \iff x=3,\ y=-2$$

Quindi $(3,-2)$, essendo l'unico p.to stas., è il punto di MIN

$$f(3,-2) = 9+8-18-16 = -17$$

Conclusione: $\sup = +\infty$, max non esiste

$\inf = \min = -17$



Esempio 2 $f(x,y) = x^2+2y^2-6x+8y$

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \geq 6\}$

Ancora una volta $\sup = +\infty$ poiché vale

$f(0,t)$ con $t \to +\infty$ (andava bene anche $f(t,0)$ con $t\to+\infty$)

Ancora una volta W. generalizzato $\Rightarrow$ min esiste (il limite a $+\infty$ in A esiste perché esiste in $\mathbb{R}^2$ che è + grande).

I p.ti di minimo saranno p.ti stas. (una in A non ne esistono), oppure sul bordo, cioè sulla retta $x+y=6$.

Come trovo i candidati: con i moltiplicatori di Lagrange, oppure parametrizzando.

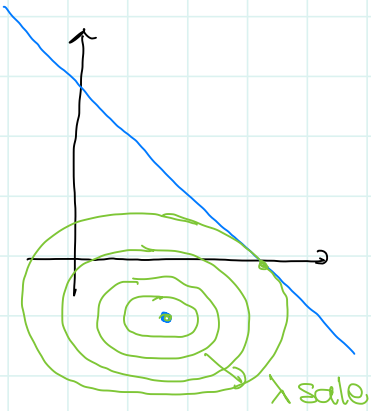
In questo caso $y = 6-x$ e quindi

$$f(x, 6-x) = x^2 + 2(6-x)^2 - 6x + 8(6-x)$$
$$= \text{espando} \dots \text{viene una parabola che avrà un minimo, che è il valore richiesto}$$

Oss. geometrica Si poteva fare con le linee di livello

$$x^2 + 2y^2 - 6x + 8y = \lambda \quad , \quad x^2 - 6x + 9 + 2(y^2 + 4y + 4) = \lambda + 9 + 8$$
$$(x-3)^2 + 2(y+2)^2 = \lambda + 17$$

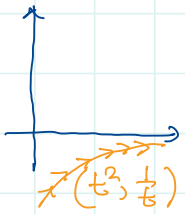
queste sono ellissi con centro in $(3, -2)$, che guarda caso è il punto stazionario



La prima ellisse tangente determina il p.to di min.

Esempio (n.t.) Determinare inf e sup in $\mathbb{R}^2$ di

$$f(x,y) = y^2 + \arctan(xy)$$



Si vede subito che $\sup = +\infty$ ($\lim_{t \to -\infty} f(0,t) = +\infty$)

↑ anche $+\infty$ era ok

Per l'inf. osserviamo che

$$f(x,y) \geq -\frac{\pi}{2} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

↑ anche stretta

questo dice che $\inf \geq -\frac{\pi}{2}$

Basta trovare un conto che va a $-\frac{\pi}{2}$ (serve $y \to 0$ e $xy \to -\infty$)

Prendiamo

$$\lim_{t \to -\infty} f\left(t^2, \frac{1}{t}\right) = \lim_{t \to -\infty} \frac{1}{t^2} + \arctan(t) = -\frac{\pi}{2}$$

ANALISI 2 – LEZIONE 16

COORDINATE CILINDRICHE

Siamo in $\mathbb{R}^3$

Coord. cartesiane: (x,y,z)

Coord. cilindriche: ρ, ϑ, z (z = quota; ρ, ϑ = polari corrisp. a x,y nel piano)

Formule di passaggio

$$x = \rho\cos\vartheta, \quad y = \rho\sin\vartheta, \quad z = z$$

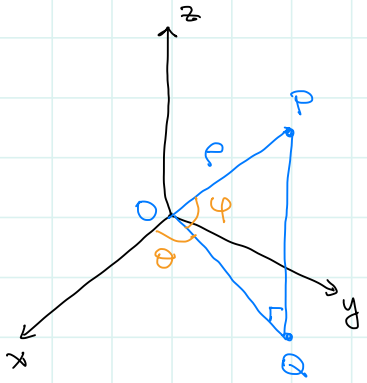
se conosco le cilindriche, in questo modo ottengo le cartesiane

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$$

La formula per ϑ dipende dal quadrante, come per le polari

COORDINATE SFERICHE

Ce ne sono diverse versioni. Qui presento la versione dei geografi

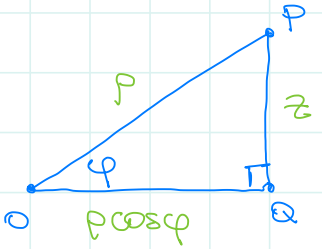


Dato P nello spazio, sia Q la sua proiezione sul piano xy.
Detta O l'origine, rediciamo

→ con ρ la lunghezza di OP

→ con ϑ l'angolo tra OQ ed il semiasse positivo delle x (il ϑ di Q nelle polari)

→ con φ l'angolo tra OQ e OP.



Dove variano?

$\rho \geq 0$ (pensato come raggio)

$-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ (latitudine)

$0 \leq \vartheta \leq 2\pi$ (longitudine)

Casi speciali: • l'origine è l'unico p.to con $\rho = 0$ (il suo θ e il suo φ non sono rilevanti)

• per i p.ti dell'asse z (meno l'origine) si ha che $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ e θ non ha senso.

Formule di passaggio

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Distanza di $P = (x,y,z)$ dall'origine

Se conosco le coord. sferiche ρ, θ, φ, come trovo le cartesiane?

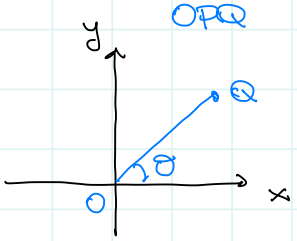
$$x = \rho \cos\varphi \cos\theta \qquad y = \rho \cos\varphi \sin\theta \qquad z = \rho \sin\varphi$$

↑ guardare triangolo OPQ

$x = OQ \cdot \cos\theta = \rho \cos\varphi \cos\theta$

$y = OQ \cdot \sin\theta = \rho \cos\varphi \sin\theta$

(x e y si ricavano nel piano xy noto OQ e θ)



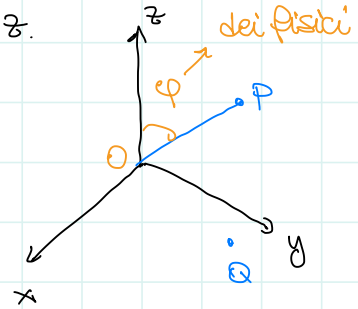
Achtung! Le coord. sferiche dei fisici sono DIVERSE. La differenza è φ, che per loro è l'angolo tra OP e il semiasse positivo delle z.

Cosa cambia

→ φ dei fisici sta tra 0 e π

→ φ fisici $= 90° - \varphi$ geografi

→ nelle formule seni e coseni si scambiano



Ancora peggio: qualcuno scambia θ e φ, quindi sempre occhio alle convenzioni.

Esempio 1 $\lim_{\|(x,y,z)\| \to +\infty} (x^2+y^2+z^2 - x + 3z)$

secondo grado — primo grado

Passo in sferiche: la funzione diventa

$$\rho^2 - \rho\cos\varphi\cos\vartheta + 3\rho\sin\varphi \geq \rho^2 - \rho - 3\rho = \boxed{\rho^2 - 4\rho} \to +\infty$$

($\rho^2 = x^2+y^2+z^2$)

Per confronto anche la funzione data tende a $+\infty$.

Esempio 2 $\lim_{\|(x,y,z)\| \to +\infty} \frac{xyz}{x^4+y^4+z^4}$ (3 variabili)

$\lim_{x^2+y^2 \to +\infty} \frac{xy}{x^4+y^4}$ (2 variabili)

In due variabili usiamo le polari (+ trucco valore assoluto)

$$0 \leq \frac{|\rho\cos\vartheta \cdot \rho\sin\vartheta|}{\rho^4(\cos^4\vartheta+\sin^4\vartheta)} = \frac{|\cos\vartheta\cdot\sin\vartheta|}{\rho^2(\cos^4\vartheta+\sin^4\vartheta)} \leq \frac{1}{\rho^2 m_0} \to 0$$

per fare una frac. + grande serve num. + grande e denom + piccolo (essendo tutto positivo)

Per il solito discorso esiste m_0 t.c.

$\cos^4\vartheta + \sin^4\vartheta \geq m_0 > 0$

per ogni $\vartheta \in [0, 2\pi]$

In 3 variabili usiamo le sferiche

$$0 \leq \frac{\rho\cos\varphi\cos\vartheta \cdot \rho\cos\varphi\sin\vartheta \cdot \rho\sin\varphi}{\rho^4[\cos^4\varphi\cos^4\vartheta + \cos^4\varphi\sin^4\vartheta + \sin^4\varphi]} \leq \boxed{\frac{1}{\rho}\,\frac{1}{m_0}} \to 0$$

Per poter fare il passaggio, serve sapere che

$$\exists\, m_0 > 0 \text{ t.c. } \text{Denom.} \geq m_0 \quad \forall \varphi \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}],\ \forall \vartheta \in [0, 2\pi]$$

Versione nuova del solito discorso. Chiamiamo $g(\theta,\varphi)$ la roba trigonometrica al denominatore. È una funzione continua di θ e φ. L'insieme $[0,2\pi]\times[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ è compatto (rettangolo bordo compreso), quindi $g(\theta,\varphi)$ ammette un minimo m_0 che è il valore in certo punto (θ_0,φ_0). È evidente che $m_0\geq 0$, essendo somma di quarte potenze. Può essere $m_0=0$?

NO! Dovrebbe essere $\sin^4\varphi_0=0$, ma allora $\cos^4\varphi_0=1$ e resterebbe $\cos^4\theta_0+\sin^4\theta_0$ e questi non possono essere entrambi nulli. Quindi $m_0=0$ è impossibile, dunque $m_0>0$.

Esempio 3 $\lim_{\|(x,y,z)\|\to+\infty} \underbrace{x^2+2y^2+3z^2}_{2^\circ\text{ grado}}+\underbrace{xyz}_{3^\circ\text{ grado}}$ NON ESISTE

$$\lim_{t\to+\infty} f(t,t,t)=\lim_{t\to+\infty} 6t^2+t^3=+\infty$$

$$\lim_{t\to-\infty} f(t,t,t)=\lim_{t\to-\infty} 6t^2+t^3=-\infty.$$

Oss: importa dove va il denominatore, cioè che $x^2+y^2+z^2$ tenda a $+\infty$

— o — o —

ANALISI 2 — LEZIONE 17

Tecnica di PAREGGIAMENTO DEGLI ESPONENTI

Esempio 1 $\lim_{x^2+y^2\to+\infty} \dfrac{xy}{x^2+y^4}$

Astenersi da discorsi a θ fisso, del tipo

$$\frac{\rho^2\cos\theta\sin\theta}{\rho^2\cos^2\theta+\rho^4\sin^4\theta} = \frac{\cos\theta\sin\theta}{\cos^2\theta+\rho^2\sin^4\theta}$$

così si sta fissando θ, cioè si va lungo le rette.

- Se $\sin\theta \neq 0$, allora c'è ρ^2 al denominatore e tende a 0
- Se $\sin\theta = 0$, allora è 0 sopra e 1 sotto, quindi fa 0.

Facciamo un cambio di variabili in modo da "pareggiare gli esponenti"

$x = u^2 \quad y = v$

Il limite "diventa"

$$\lim_{u^2+v^2\to+\infty} \frac{u^2v}{u^4+v^4}$$

Su questo posso procedere in coord. polari con le solite storie

$$0 \le \frac{\rho^3|\cos^2\theta\sin\theta|}{\rho^4(\cos^4\theta+\sin^4\theta)} \le \frac{1}{\rho}\frac{1}{m_0}$$ e si conclude

C'è il problema che se metto $x = u^2$, per forza x è positivo.
La cosa va di sicuro bene se facciamo il limite nel 1° quadrante

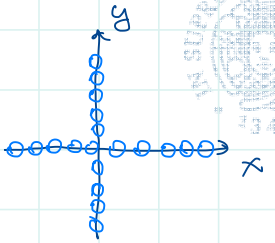
$$\lim_{\substack{x^2+y^2\to+\infty \\ x\ge0,\, y\ge0}} \frac{xy}{x^2+y^4} = \lim_{\substack{u^2+v^2\to+\infty \\ u\ge0,\, v\ge0}} \frac{u^2v}{u^4+v^4}$$

Ci sono due vie di uscita:

→ osservare che basta fare il limite di $\dfrac{|x|\cdot|y|}{x^2+y^4}$ e ora $|x| = u^2$ non crea problemi

→ osservare che la funzione è simmetrica per cui quello che accade nel 1° quadrante si ripercuote sugli altri.

Esempio 2 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^4}$ Non esiste

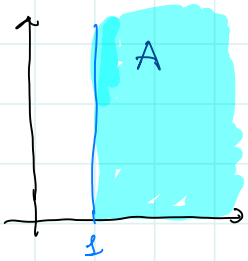


$\lim_{t\to 0^+} f(t,0) = 0$

$\lim_{t\to 0^+} f(t^2,t) = \lim_{t\to 0^+} \dfrac{t^3}{2t^4} = +\infty$

Esempio 3 Determinare inf e sup di $\dfrac{xy}{x^2+y^4}$ nell'insieme

$A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 1, y\geq 0\}$



È immediato che inf = min = 0. Infatti

$f(x,y)\geq 0$ per ogni $(x,y)\in A$ (addirittura in tutto il 1° quadrante)

$f(2^n,0)=0$ (in realtà in tutto l'asse x)

Possiamo dire che il max esiste per Weierstrass generalizzato.

Infatti

- $\lim_{\substack{x^2+y^2\to+\infty \\ (x,y)\in A}} f(x,y) = 0$ (è vero anche senza limitarsi ad A)
- esiste $(x,y)\in A$ t.c. $f(x,y)>0$ (ad esempio $(2,7)$)

Una volta che max esiste, lo cerchiamo tra i p.ti stazionari o sul bordo

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{y(x^2+y^4) - 2x\cdot xy}{(x^2+y^4)^2}, \frac{x(x^2+y^4) - 4y^3 xy}{(x^2+y^4)^2} \right) = (0,0)$$

$$\frac{y^5 - x^2 y}{(\ )^2} = 0 \qquad \frac{x^3 - 3xy^4}{(\ )^2} = 0$$

$$\begin{cases} y(y^4 - x^2) = 0 \\ x(x^2 - 3y^4) = 0 \end{cases}$$

1ª equ

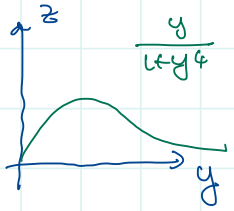
- $y=0$ → 2ª equ → $x=0$
- $x^2 = y^4$ → $x=0$ e $y=0$

Morale: l'unico p.to stazionario è $(0,0)$ che non va bene per nessun motivo
→ non sta in A
→ è l'unico p.to in cui $\det = 0$, quindi lì la funzione non ha senso!

Non resta che cercare sul bordo, fatto da 2 pezzi

→ asse x, dove $f \equiv 0$ (questi sono i p.ti di min)
→ p.ti del tipo $(1,y)$ dove diventa $\frac{y}{1+y^4}$, e questa si studia per $y \geq 0$ facilmente:
Deriviamo:

$$\frac{1+y^4-4y^4}{(1+y^4)^2} = \frac{1-3y^4}{\dots} = 0 \iff y = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$$



Quindi il p.to di max è $\left(1, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)$.

Esempio 4 Determinare per quali valori di $a > 0$ esiste il

$$\lim_{\substack{x^2+y^2 \to +\infty \\ x \geq 0,\, y \geq 0}} \frac{x y^a}{x^2+y^4}$$

1° fatto Il limite, se esiste, fa per forza 0. Infatti

$$\lim_{t \to +\infty} f(t,0) = 0$$

2° fatto Per $a \geq 3$ il limite non esiste perché

$$\lim_{t \to +\infty} f(t,t) = \frac{t^{a+1}}{t^2+t^4} = \begin{cases} 1 & \text{se } a = 3 \\ +\infty & \text{se } a > 3 \end{cases}$$

3° fatto Per $a = 1$ già sappiamo che esiste. Da questo si deduce che fa 0 anche per $a < 1$

Proviamo gli esponenti e vediamo che succede

$x = u^2 \qquad y = v$

$\lim_{\substack{u^2+v^2 \to +\infty \\ u \geq 0,\ v \geq 0}} \dfrac{u^2 v^a}{u^4+v^4}$ e questo in coord. polari diventa

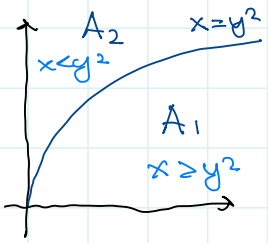
$$\frac{\rho^2 \cos^2\vartheta\, \rho^a \sin^a\vartheta}{\rho^4(\cos^4\vartheta+\sin^4\vartheta)} = \frac{1}{\rho^{2-a}} \frac{\cos^2\vartheta \sin^a\vartheta}{\cos^4\vartheta+\sin^4\vartheta}$$

→ Per $a < 2$ con i soliti discorsi si vede che $\lim = 0$

→ Per $a \geq 2$ il limite non esiste, infatti

$$\lim_{t \to +\infty} f(t^2, t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{t^2 \cdot t^a}{2t^4} = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{2} \frac{1}{t^{2-a}} = \begin{cases} \frac{1}{2} & a = 2 \\ +\infty & a > 2 \end{cases}$$

Oss. Per $a < 2$ si può dimostrare l'esistenza anche "senza" passaggio, ma dividendo in zone



Facciamo per comodità $a = 1$

In A_1 abbiamo che

$$0 \leq \frac{xy}{x^2+y^4} \leq \frac{x\sqrt{x}}{x^2+y^4} \leq \frac{x\sqrt{x}}{x^2} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

$y \leq \sqrt{x}$ in A_1

$\boxed{\frac{1}{\sqrt{x}}} \to 0$ perché $x \to +\infty$ in A_1

$$0 \leq \frac{xy}{x^2+y^4} \leq \frac{y^3}{x^2+y^4} \leq \frac{y^3}{y^4} = \boxed{\frac{1}{y}}$$

$x \leq y^2$ in A_2

$\boxed{\frac{1}{y}} \to 0$ perché $y \to +\infty$ in A_2

ANALISI 2 – LEZIONE 18

Esempio 1 Determinare $\inf$ e $\sup$ di $f(x,y,z) = x^2+y^2+2z^2$ su
$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, xyz = 1\}$

Domanda 1 L'insieme A è limitato?
In due variabili l'analogo non è limitato $xy=1$
quindi tira una brutta aria.
Ad esempio $x = n$, $y = \frac{1}{n}$, $z = 1$ con n enorme

☹ Non limitato $\Rightarrow$ Non compatto $\Rightarrow$ nessuna garanzia di max / min.

RISPOSTA 1 $\lim_{t \to +\infty} f\left(t, \frac{1}{t}, 1\right) = t^2 + \frac{1}{t^2} + 2 = +\infty$
$\left(t, \frac{1}{t}, 1\right)$ sta nell'insieme A quando $t > 0$

Questo dice che $\sup = +\infty$ e max N.E.

Domanda 2 Esiste $\lim_{\substack{\|(x,y,z)\| \to +\infty \\ (x,y,z) \in A}} f(x,y,z)$?

Sì, esiste anche senza restringersi ad A e fa $+\infty$ (perché $f(x,y,z) \geq \rho^2$ delle coord. sferiche)

☺ Weierstrass generalizzato $\Rightarrow$ il minimo esiste.
Dove trovo candidati p.ti min? L'insieme A è "solo bordo"
e quindi andiamo di moltiplicatori con $g(x,y,z) = xyz - 1$

1° sistema
$$\begin{cases} yz = 0 \\ xz = 0 \\ xy = 0 \\ xyz = 1 \end{cases}$$
Difficile abbia soluzione...
(1ª e 4ª incompatibili)

2° sistema

$$\begin{cases} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \\ f_z = \lambda g_z \\ g = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x = \lambda yz \\ 2y = \lambda xz \\ 4z = \lambda xy \\ xyz = 1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} \cdot x \\ \cdot y \\ \cdot z \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 2x^2 = \lambda xyz = \lambda \\ 2y^2 = \lambda xyz = \lambda \\ 4z^2 = \lambda xyz = \lambda \end{matrix}$$

Quindi $x^2 = y^2 = 2z^2$, cioè (essendo tutto ≥ 0) $x = y = \sqrt{2}z$

Sostituendo nella quarta $2z^3 = 1$ e da qui ho finito

$$z = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \qquad x = y = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[6]{2}$$

Questo è il p.to di minimo !!

In alternativa potevamo "parametrizzare il vincolo" $z = \frac{1}{xy}$ e quindi studiare

$$x^2 + y^2 + \frac{2}{x^2y^2}$$

al variare di $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Cerchiamo i p.ti stazionari

(i vecchi stretti)

$$2x - \frac{4}{x^3y^2} = 0 \qquad 2x^4y^2 = 4$$

$$2y - \frac{4}{x^2y^3} = 0 \qquad 2x^2y^4 = 4$$

$$\Rightarrow \quad x^4y^2 = x^2y^4$$

$$\Downarrow$$

$$x^2 = y^2 \quad (\text{perché } x>0 \text{ e } y>0)$$

$$\Downarrow$$

$$x = y$$

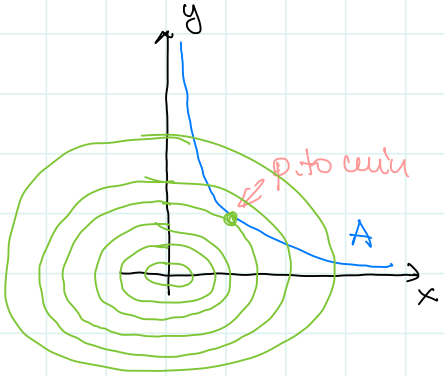
Resta $2x - \frac{4}{x^5} = 0 \rightsquigarrow x^6 = 2 \rightsquigarrow x = \sqrt[6]{2}$ ☺

— o — o —

Oss. In versione 1 dim. potrebbe essere

sup e inf di x^2+y^2 su

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, xy = 1\}$

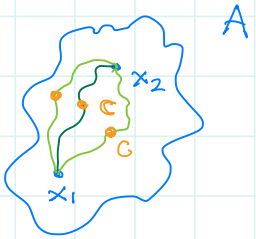


Cosa resta in + variabili del teorema di esistenza degli zeri?

Analisi 1 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua, $f(a)<0$ e $f(b)>0$.
Allora esiste $c\in(a,b)$ t.c. $f(c)=0$.

Analisi 2 Sia $A\subseteq\mathbb{R}^n$ e sia $f: A\to\mathbb{R}$ continua.
Supponiamo
(i) esiste $x_1\in A$ dove $f(x_1)<0$
(ii) esiste $x_2\in A$ dove $f(x_2)>0$
(iii) esiste un arco che percorre una curva continua da x_1 a x_2 restando dentro A.
Allora esiste c nel percorso dell'arco in cui $f(c)=0$

Dim. Se il percorso dell'arco è $x(t)$ con $t\in[a,b]$
↑ vettore
allora la funzione $f(x(t))$ ha valori di segno opposto nei due estremi.



Occhio Se A è fatto da 2 pezzi, il percorso dell'arco potrebbe non esistere !!!

Domanda: può essere che il punto di annullamento è unico?
In generale NO: basta che riesca a fare infinite curve che si incontrano solo agli estremi.

Esempio classico $f(x,y) = x + e^{xy} - y^2 + \arctan x$

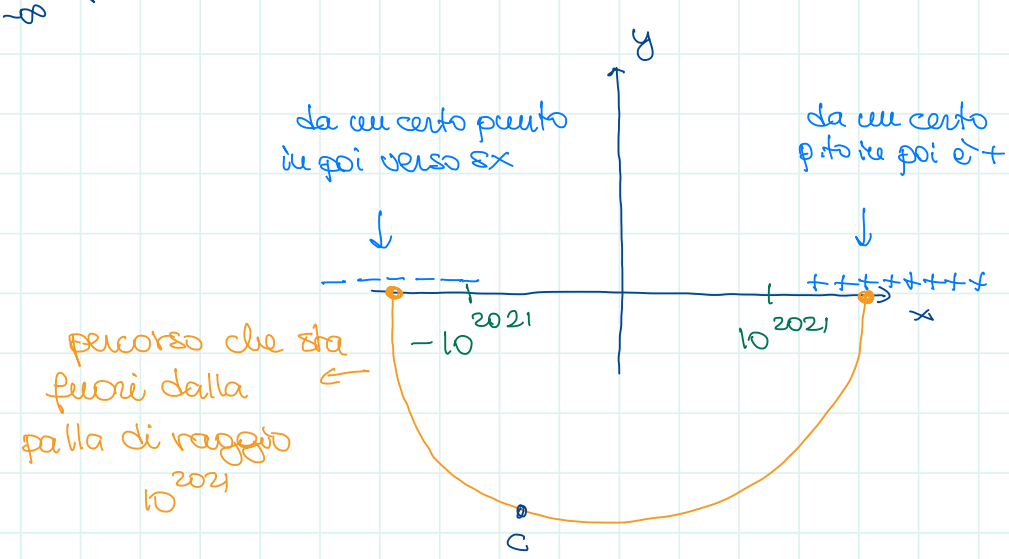
Dimostrare che $\exists\,(x,y)$ con $x^2+y^2 \geq 10^{2021}$ t.c. $f(x,y)=0$.

(cioè f si annulla in un p.to lontanissimo dall'origine)

Dim $\lim_{t\to+\infty} f(t,0) = +\infty$

$\lim_{t\to-\infty} f(t,0) = -\infty$

Questo dice che $\lim_{x^2+y^2\to+\infty} f(x,y)$ N.E.



Per il teo. prec. esiste un p.to su questo cammino in cui f si annulla

— o — o —

ANALISI 2 – LEZIONE 19

FORME QUADRATICHE Una forma quadratica in $\mathbb{R}^n$ è un polinomio di 2° grado omogeneo (cioè con i termini di 2° grado) nelle variabili $x_1, \dots, x_n$

Esempi In 3 variabili

$$q(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + eyz + fxz$$

In 2 variabili

$$q(x,y) = ax^2 + by^2 + cxy$$

Si intende che $a, b, \dots$ sono numeri DATI

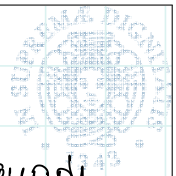
Oss. Di solito è meglio pensare ai termini misti con un coeff. 2 davanti $q(x,y) = ax^2 + by^2 + 2cxy$

DOMANDONE Cosa si può dire del segno di $q(x,y)$ o $q(x,y,z)$ al variare delle variabili?

Definizioni Sia $q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una forma. La forma si dice

- **definita positiva** se $q(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ con $x \neq 0$ (↑ ↑ vettori)
- **semidefinita positiva** se $q(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$
- **definita negativa** se $q(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ con $x \neq 0$
- **semidefinita negativa** se $q(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$
- **indefinita** se non vale nessuna delle precedenti, cioè $\exists\, x_1 \in \mathbb{R}^n$ t.c. $q(x_1) > 0$ e $\exists\, x_2 \in \mathbb{R}^n$ t.c. $q(x_2) < 0$

Come stabilisco in quale caso mi trovo?



Matrice associata ad una forma quadratica Ogni forma quadr. si può scrivere nella forma

$$q(x) = x^t A x$$

dove A è una matrice $n \times n$ simmetrica, e x è pensato come vettore COLONNA.

Esempi In 2 variabili

$$q(x,y) = ax^2 + by^2 + 2cxy = (x\ y)\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$(x\ y)\begin{pmatrix} ax+cy \\ cx+by \end{pmatrix}$$

$$ax^2 + cxy + cxy + by^2$$

In 3 variabili

$$q(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2eyz + 2fxz = (x\ y\ z)\begin{pmatrix} a & d & f \\ d & b & e \\ f & e & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Ci sono 4 metodi per stabilire in quale caso ci si trova

1. Completamento dei quadrati
2. Segno autovalori
3. Sylvester in varie forme
4. Metodo di CARTESIO

SEGNO AUTOVALORI Sia A la matrice associata a $q(x)$.
È una matrice **simmetrica**, dunque per Alg. Lin. ha n autovalori REALI.

- Autovalori tutti > 0 $\rightsquigarrow$ $q(x)$ def. pos. $A > 0$
- " " ≥ 0 $\rightsquigarrow$ $q(x)$ semidef. pos. $A \geq 0$
- " " < 0 $\rightsquigarrow$ $q(x)$ def. neg. $A < 0$
- " " ≤ 0 $\rightsquigarrow$ $q(x)$ semidef. neg. $A \leq 0$
- autovalori un po' e un po' $\rightsquigarrow$ $q(x)$ indefinita A indef.

Def. Si dice segnatura di una forma una terna di numeri n_0, n_+, n_- con $n_0 + n_+ + n_-$ dove
n_0 = # autov. nulli
n_+ = # autov. positivi
n_- = # autov. negativi

Oss. Trovare gli autovalori può essere impossibile, ma gli altri metodi permettono di stabilire il segno senza calcolarli.

COMPLETAMENTO DEI QUADRATI Ogni forma quadratica si può scrivere come somma / differenza di quadrati di espressioni di primo grado linearmente indipendenti. A questo punto
n_+ = # espressioni sommate (con il segno +)
n_- = # espressioni sottratte (con il segno −)
n_0 = ciò che viene per differenza ($n_0 = n - n_+ - n_-$)

Esempio 1 $q(x,y) = x^2 + 4xy + y^2$

$= x^2 + 4xy + 4y^2 - 4y^2 + y^2$

$= (x+2y)^2 - 3y^2$

$= (x+2y)^2 - (\sqrt{3}y)^2$ quindi $n_+ = n_- = 1$ (e quindi $n_0 = 0$)

↑ Lin. indip.

In alternativa la matrice è $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Det = $1-4 = -3$ = prod. autov. ⇝ saranno + e −.

Esempio 2 $q(x,y,z) = x^2 + 2z^2 + 6xy - 4xz$

$= x^2 + 6xy - 4xz + 2z^2$

$= x^2 + 6xy - 4xz + 9y^2 - 9y^2 + 4z^2 - 4z^2 + 2z^2 + 12yz - 12yz$

$= (x+3y-2z)^2 - 9y^2 - 2z^2 + 12yz$

$= (x+3y-2z)^2 - 9y^2 + 12yz + 4z^2 - 4z^2 - 2z^2$

$= (x+3y-2z)^2 - (3y-2z)^2 + 2z^2$

In questo caso $n_+ = 2$ e $n_- = 1$

La matrice sarebbe $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A$

Potevamo dedurre altrimenti il segno degli autovalori?

Det = −18 (negativo ⇝ autovalori ++− oppure −−+)

Traccia = 3 (quindi −−− non è possibile)

Quindi l'unica possibilità rimasta è ++−.

Interpretazione geometrica della segnatura

n_+ = massima dimensione di un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ su cui $q(x)$ è definita positiva (cioè $q(x) > 0$ per ogni $x \neq 0$ nel sottospazio)

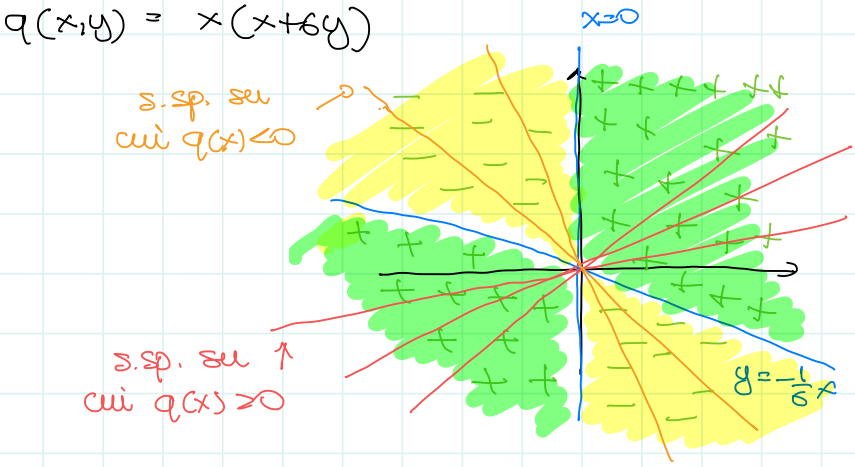
n_- = massima dim... $q(x)$ è definita negativa

Esempio 3 $q(x,y) = x^2 + 6xy$

$\det = -9 \rightsquigarrow$ autovalori $+ -$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

In alternativa $\qquad x^2 + 6xy + 9y^2 - 9y^2 = (x+3y)^2 - (3y)^2$

Studio il segno di $q(x,y) = x(x+6y)$



— o — o —

ANALISI 2 – LEZIONE 20

METODO DI SYLVESTER (Metodo dei MINORI ORLATI)

Descrizione del caso standard. Sia A una matrice $n \times n$ simm.

→ Calcolo tutti i determinanti a partire da NW

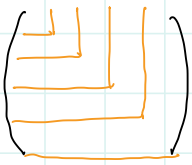
→ Spero che nessuno venga nullo ☺

→ Scrivo di fila i segni $+ \; 0 \; -$ ottenuti

→ Aggiungo un $+$ d'ufficio in testa

→ Miracolo: il numero di PERMANENZE è n_+

il numero di VARIAZIONI è n_-



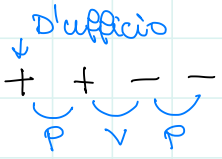
Esempio $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\text{Det}_{1\times 1} = 1$

$\text{Det}_{2\times 2} = -9$

$\text{Det}_{3\times 3} = -18$

Segni



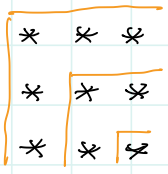
$\#\text{autov.} + = \#P = 2$

$\#\text{autov.} - = \#V = 1$

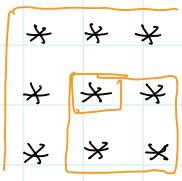
Varianti del metodo Quello descritto è Sylvester 1-2-3

Le varianti consistono nel procedere in maniera diversa

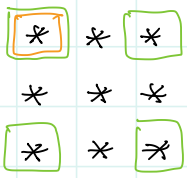
3-2-1



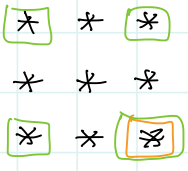
2-3-1



1-3-2



3-1-2



Torniamo alla matrice iniziale $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

3-2-1: ☹ ($Det_{2\times 2} = 0$)

3-1-2: $Det_{1\times 1} = 2$
$Det_{2\times 2} = -2$
$Det_{3\times 3} = -18$

$+ \; + \; - \; -$
P V P

Morale: posso scegliere l'ordine in cui procedere in modo da evitare gli zeri "on the road".

Esempio $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $q(x,y,z) = 3y^2 + z^2 + 2xy + 4xz$

1-2-3 ? Pessima partenza

3-2-1 ? $Det_{1\times 1} = 1$
$Det_{2\times 2} = 3$
$Det_{3\times 3} = -13$

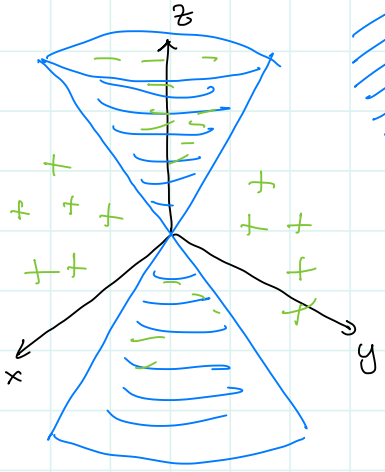
$+ \; + \; + \; -$
P P V

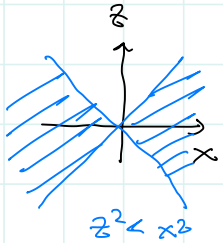
gli autovalori sono $++-$

Esempio $q(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$

Come sono fatte le zone di positività e negatività?

$x^2 + y^2 - z^2 > 0$
$\Leftrightarrow \; z^2 < x^2 + y^2$
$\Leftrightarrow \; |z| < \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{\rho \text{ delle coord. polari}}$





Segno − dentro il cono
Segno + fuori dal cono.

Perché funziona? Vedi lezioni di algebra lineare.
Achtung! Evitare Sylvester creativi (LL) ← NO!!

Def. Una forma quadratica si dice COERCIVA se esiste un numero reale $m > 0$ tale che

$$q(x) \geq m \|x\|^2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

(m: minimo tra gli autovalori di A)

Oss. Se $q(x)$ è coerciva, allora è definita positiva.

Teorema Vale il viceversa dell'osserv. precedente, cioè le forme quadratiche definite positive sono coercive.

Dim. di Analisi Consideriamo la funzione $R(x) = \dfrac{q(x)}{\|x\|^2}$ definita per ogni $x \neq 0$.

Questa funzione è 0-omogenea, cioè

$$R(\lambda x) = R(x) \qquad \forall \lambda > 0 \ (\lambda: \text{numero}) \qquad \forall x \neq 0 \ (x: \text{vettore})$$

Infatti

$$R(\lambda x) = \frac{q(\lambda x)}{\|\lambda x\|^2} = \frac{\lambda^2 q(x)}{\lambda^2 \|x\|^2} = R(x)$$

Quindi $R(x)$ è costante se tutti i multipli positivi di un vettore, cioè è costante se tutte le semirette che escono dall'origine.
Ora consideriamo

$$\min \{ R(x) : \underbrace{\|x\| = 1}_{\text{sfera unitaria (solo bordo)}} \}$$

Esiste perché $R(x)$ è continua e la sfera è compatta (W.)
Inoltre (solito discorso) è il valore assunto in un p.to x_0, cioè

$$\min = R(x_0) = \frac{q(x_0)}{\|x_0\|^2} = q(x_0) > 0$$

($\|x_0\|^2 = 1$; perché $q(x)$ è definita positiva)

Basta porre $m = q(x_0)$ e abbiamo finito

$R(x) \geq m$ sulla sfera $\Rightarrow$ (↑ o-omog) $R(x) \geq m \quad \forall x \neq 0$

$\Rightarrow \frac{q(x)}{\|x\|^2} \geq m \quad \forall x \neq 0 \quad \Rightarrow q(x) \geq m\|x\|^2 \quad \forall x \neq 0$

e anche per $x = 0$.

Dim. di Algebra Lineare $q(x) = x^t A x$ dove A è una matrice simmetrica.

Per il teorema spettrale A è diagonalizzabile mediante una matrice ortogonale, cioè esiste M tale che

$$A = M^{-1} D M \qquad \text{e} \qquad M^{-1} = M^t$$

quindi $A = M^t D M$ e quindi

$$q(x) = x^t M^t D M x = (Mx)^t D (Mx)$$

(↑ diagonale)

Adesso poniamo $Mx = (v_1, \dots, v_n) = v$. Allora

$$v^t D v = \lambda_1 v_1^2 + \dots + \lambda_n v_n^2$$

Sappiamo che $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono tutti positivi (perché A è definita positiva), dunque il minimo tra di loro è un certo $m > 0$, e quindi

$$q(x) = v^t D v \geq m(v_1^2 + \dots + v_n^2) = m\|v\|^2 = m\|Mx\|^2$$
$$= m\|x\|^2$$

(↑ perché M è ortogonale)

$$\|Mx\|^2 = (Mx)^t(Mx) = x^t \underbrace{M^t M}_{Id} x = x^t x = \|x\|^2.$$

ANALISI 2 – LEZIONE 21

Derivate successive per funzioni di più variabili

$f(x,y) = x^2 \sin y \qquad f_x = 2x \sin y \qquad f_y = x^2 \cos y$

$f_{xx} = (2x \sin y)_x = 2 \sin y \qquad f_{yx} = (x^2 \cos y)_x = 2x \cos y$

$f_{xy} = (2x \sin y)_y = 2x \cos y \qquad f_{yy} = (x^2 \cos y)_y = -x^2 \sin y$

Oss. Per una funzione di n variabili, le derivate prime sono n, quelle seconde n^2, quelle terze n^3 ... APPARENTEMENTE

TEOREMA DI SCHWARZ Sotto opportune ipotesi (verificate praticamente sempre, ad esempio se le derivate in questione sono continue) le derivate MISTE sono uguali.

Conseguenza Per una funzione di 2 variabili
- → le derivate prime sono 2
- → " " seconde sono 3
- → " " terze sono 4 ($f_{xxx}, f_{xxy}, f_{xyy}, f_{yyy}$)
- → " " k-esime sono $k+1$ (conta solo quante volte derivo rispetto ad x)

Notazione $\dfrac{\partial^{86} f}{\partial x^{14} \partial y^{72}}$ = derivare f 14 volte rispetto ad x e 72 volte rispetto ad y (l'ordine di esecuzione delle operazioni non importa)

Matrice HESSIANA Consideriamo le derivate parziali seconde.

In due variabili abbiamo f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} $\quad Hf = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$

↑ matrice simmetrica

In tre variabili abbiamo $Hf = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix}$

↑ matrice 3×3 simmetrica

e così via in ogni numero di variabili.

Brutalmente: → con le deriv. parz. prime costruiamo ∇f

→ " " " " seconde " Hf.

La derivata prima di Analisi 1 diventa il gradiente

" " seconda " " " " la matrice Hessiana.

STUDIO LOCALE DI UN PUNTO STAZIONARIO

Analisi 1 Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^2 (derivata seconda continua)

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un p.to stazionario ($f'(x_0)=0$).

Allora valgono le seguenti implicazioni

(i) x_0 p.to di min. loc. $\Rightarrow f''(x_0) \geq 0$

(ii) x_0 p.to di max. loc. $\Rightarrow f''(x_0) \leq 0$

(iii) $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ p.to di min. loc.

(iv) $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ p.to di max. loc.

Achtung! Se $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ NON SI PUÒ DIRE NULLA.

Oss. Vale anche se f è definita solo su un intervallo.

Analisi 2 Sia $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ di classe C^2 (vale anche se è definita solo in un aperto)
Sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un p.to staz. ($\nabla f(x_0) = 0$)
Allora valgono le seguenti implicazioni.

(i) x_0 p.to di min. loc. $\Rightarrow$ $Hf(x_0) \geq 0$ (semidef. positiva)

(ii) " max " $\Rightarrow$ $Hf(x_0) \leq 0$

(iii) $Hf(x_0) > 0$ (def. posit.) $\Rightarrow$ x_0 p.to di min. loc.

(iv) $Hf(x_0) < 0$ (def. neg.) $\Rightarrow$ x_0 p.to di max. loc.

(v) $Hf(x_0)$ indefinita $\Rightarrow$ x_0 non è né max né min, ma un p.to di sella.

Achtung! Se la matrice è solo semidefinita non si può dedurre MOLTO.

Esempio 1 $f(x,y) = x^2 - y^2$ $f_x = 2x$ $f_y = -2y$
$f_{xx} = 2$ $f_{xy} = 0$ $f_{yy} = -2$

$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ L'origine $(0,0)$ è p.to stazionario
$\nabla f(0,0) = (0,0)$

$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, quindi indefinita $\Rightarrow$ $(0,0)$ p.to di sella

Esempio 2 $f(x,y) = xy$ $f_x = y$ $f_y = x$
$f_{xx} = 0$ $f_{xy} = 1$ $f_{yy} = 0$

$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\det = -1 \rightsquigarrow$ autovalori: $+ \ -$

$\Rightarrow$ $(0,0)$ è un p.to stazionario e $Hf(0,0)$ è indefinita

$\Rightarrow$ $(0,0)$ è un p.to di sella.

Esempio 3 $f(x,y) = x^2+y^4$

Si vede facilmente che $(0,0)$ è un p.to di min. loc. (e anche globale). Infatti $f(0,0)=0$ e $f(x,y)>0$ per $(x,y)\neq(0,0)$

Proviamo ad applicare la teoria: $f_x = 2x$ $\quad f_y = 4y^3$

$f_{xx}=2$, $f_{xy}=0$, $f_{yy}=12y^2$

$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix}$. Ora $\nabla f(0,0)=(0,0) \Rightarrow$ stazionario :

$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\rightsquigarrow$ autovalori sono 2 e 0

$\rightsquigarrow$ semidefinita positiva

Non avrei potuto usare la matrice $Hf(0,0)$ per dedurre che è un p.to di min ($Hf \geq 0 \not\Rightarrow$ p.to di min.)

Esempio 4 $f(x,y) = x^2-y^4$. Come prima $\nabla f(0,0)=(0,0)$

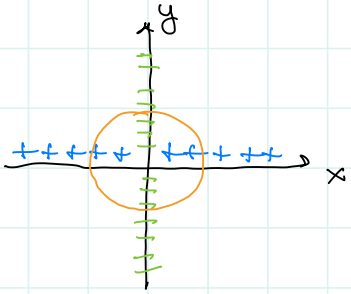
Con conti analoghi

$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -12y^2 \end{pmatrix}$ quindi $Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

quindi è la stessa di prima. Tuttavia ora $(0,0)$ è un p.to di sella.

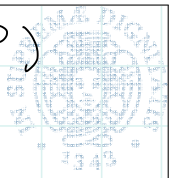
$f(t,0) = t^2 > 0$ per $t\neq 0$

$f(0,t) = -t^4 < 0$ per $t\neq 0$



Quindi in ogni cerchio centrato in $(0,0)$ abbiamo p.ti in cui f è >0 e punti in cui $f<0$. Quindi, essendo $f(0,0)=0$, l'origine non può essere p.to di max / min.

Occhio! Quando ci sono autovalori nulli, l'Hessiano non permette di concludere nulla



Domanda: possiamo fare in modo che $Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $\nabla f(0,0) = 0$ e $(0,0)$ è p.to di max. locale?

$f(x,y) = -x^2 + y^4$ non va bene perché $Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix}$ quindi in $(0,0)$ c'è -2.

La risposta alla domanda è NO: se x_0 è p.to di max. loc. allora $Hf(x_0)$ è semidef. neg., quindi NON può avere autovalori positivi.

Fatto generale: → un autovalore + esclude max. loc.
(può essere sella o min. loc.)
→ un autovalore − esclude min loc.
(può essere sella o max. loc.)

ANALISI 2 – LEZIONE 22

POLINOMI DI TAYLOR IN PIÙ VARIABILI

Analisi 1 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sotto opportune ipotesi di regolarità valgono formule del tipo

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)x^3 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n + R_n(x)$$

(derivata n-esima; $R_n(x)$: resto)

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + R_n(x)$$

dove $R_n(x) = o(x^n)$ per $x \to 0$ (resto di Peano)

oppure

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}f^{n+1}(c)x^{n+1}$$ (resto alla Lagrange)

(c: p.to misteriosa tra 0 e x.)

Se il centro è in $x_0 \neq 0$ la formula diventa

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 + \dots + o(h^n)$$

Analisi 2 Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Sotto opportune ipotesi

$$\begin{aligned} f(x,y) = {} & f(0,0) \\ & + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y \\ & + \frac{1}{2!}\left[f_{xx}(0,0)x^2 + 2f_{xy}(0,0)xy + f_{yy}(0,0)y^2\right] \\ & + \frac{1}{3!}\left[f_{xxx}(0,0)x^3 + 3f_{xxy}(0,0)x^2y \right. \\ & \qquad \left. + 3f_{xyy}(0,0)xy^2 + f_{yyy}(0,0)y^3\right] \end{aligned}$$

e così via

$$+ R_n(x,y)$$

dove

$$R_n(x,y) = o\left((\sqrt{x^2+y^2})^n\right) = o(\rho^n) \quad \text{(resto alla Peano)}$$

oppure analogo con resto alla Lagrange.

Oss I termini di grado k che compaiono nello sviluppo sono analoghi a quelli che compaiono calcolando $(x+y)^k$.

$$\frac{1}{k!}\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}\frac{\partial^k f}{\partial x^i \partial y^{k-i}}(0,0)\, x^i y^{k-1}$$

Cosa succede in 3 variabili ?

$$f(x,y,z) = f(0,0,0) + f_x(0,0,0)x + f_y(0,0,0)y + f_z(0,0,0)z$$
$$+ \frac{1}{2}\left[f_{xx}(\dots)x^2 + f_{yy}(\dots)y^2 + f_{zz}(\dots)z^2 + 2f_{xy}(\dots)xy + f_{xz}(\dots)xz + f_{yz}(\dots)yz\right]$$
$$+ \frac{1}{3!}[\dots]$$

↖ come se espandessi $(x+y+z)^3$

Con p.to base diverso dall'origine non cambia nulla, ad esempio

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)h + f_y(x_0,y_0)k$$
$$+ \frac{1}{2!}\{f_{xx}(x_0,y_0)h^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)hk + f_{yy}(x_0,y_0)k^2\}$$
$$+ o(h^2+k^2) \quad \leftarrow \text{resto alla Peano}$$

$$= f(x_0,y_0) + \langle \nabla f(x_0,y_0), (h,k)\rangle + \frac{1}{2}(h,k)\, Hf(x_0,y_0)\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix} + o(h^2+k^2)$$

In notazione vettoriale possiamo scrivere Taylor-Peano come

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), h \rangle + \frac{1}{2} h^t Hf(x_0) h + o(\|h\|^2)$$

Oss. Se ci fermavamo all'ordine 1 diventava esattamente la definizione di differenziale.

Come calcolo gli sviluppi di Taylor? Come ad Analisi 1, a partire dagli sviluppi delle funzioni elementari.

Esempio 1 $f(x,y) = (x+2y)\sin(xy) + y\cos(x^2)$

Voglio Taylor di ordine 8.

$$(x+2y)\left(xy - \frac{1}{6}x^3y^3\right) + y\left(1 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^7)\right) + o((x^2+y^2)^4)$$

$\sin t = t - \frac{1}{6}t^3 + o(t^4)$

$$= x^2y + 2xy^2 - \frac{1}{6}x^4y^3 - \frac{1}{3}x^3y^4 + y - \frac{1}{2}x^4y + o((x^2+y^2)^4)$$

$$= y + x^2y + 2xy^2 - \frac{1}{2}x^4y - \frac{1}{6}x^4y^3 - \frac{1}{3}x^3y^4 + o((x^2+y^2)^4)$$

Domanda: chi è $Hf(0,0)$? È $Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Infatti $f_{xx}(0,0)$, $f_{yy}(0,0)$ e $f_{xy}(0,0)$ compaiono nel polinomio davanti a x^2, y^2, xy, ma questi "non ci sono", quindi i coeff. sono nulli.

Taylor di ordine 6 della stessa funzione:

$$= y + x^2y + 2xy^2 - \frac{1}{2}x^4y + o((x^2+y^2)^3)$$

Esempio 2 $f(x,y) = e^{xy}\sin(x-y^3)$

Taylor di ordine 5

Ricordiamo che $e^t = 1+t+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{3!}t^3+\dots$

$\sin t = t - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 - \dots$

$$e^{xy}\sin(x-y^3) = \left(1+xy+\tfrac{1}{2}x^2y^2\right)\Big(\underbrace{x-y^3}_{t} \underbrace{-\tfrac{1}{6}(x^3-3x^2y^3)}_{-\frac{1}{6}t^3} + \underbrace{\tfrac{1}{120}x^5}_{+\frac{1}{5!}t^5}\Big)$$

$$= x - y^3 - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{2}x^2y^3 + \tfrac{1}{120}x^5 + x^2y - xy^4 - \tfrac{1}{6}x^4y + \tfrac{1}{2}x^3y^2 + \underbrace{o\left((x^2+y^2)^{5/2}\right)}_{\text{tutti gli altri termini sono del grado 6 in poi}}$$

Se ci fossimo limitati all'ordine 3 troviamo

$$e^{xy}\sin(x-y^3) = x - \tfrac{1}{6}x^3 - y^3 + x^2y + o\left((x^2+y^2)^{3/2}\right)$$

Calcolare le seguenti derivate $f_{xy}(0,0)$, $f_{xxy}(0,0)$, $f_{yyy}(0,0)$ $f_{xyy}(0,0)$.

$f_{xy}(0,0) = f_{xyy}(0,0) = 0$ (nello sviluppo "non ci sono" xy e xy^2)

Per le altre 2 ricordiamo il termine di ordine 3 nello sviluppo

$$f(x,y) = \dots + \frac{1}{6}\left[f_{xxx}(0,0)x^3 + 3f_{xxy}(0,0)x^2y + 3f_{xyy}(0,0)xy^2 + f_{yyy}(0,0)y^3\right] + \dots$$

$$= \dots - \tfrac{1}{6}x^3 - y^3 + x^2y$$

Confrontando troviamo

$f_{xxx}(0,0) = -1$, $f_{yyy}(0,0) = -6$, $f_{xxy}(0,0) = 2$

Attenzione! Questa comodità vale SOLO in $(0,0)$, o comunque nel p.to in cui si sta sviluppando

Esempio 3 $f(x,y) = \log(1+x^2y)\cdot \arctan(x+y^2)$

Ordine 4

Ricordiamo $\log(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 + \dots$

$\arctan t = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \dots$

Quindi

$$f(x,y) = \left(x^2y - \frac{1}{2}x^4y^2\right)\left(x+y^2 - \frac{1}{3}(x^3+3x^2y^2)\right) + o(\rho^4)$$

$$= x^3y + x^2y^3 - \frac{1}{3}x^5y - x^4y^3 - \frac{1}{2}x^5y^2 + o\left((x^2+y^2)^{4/2}\right).$$

Oss. Il p.to $(0,0)$ è stazionario (non ci sono i termini di grado 1) e $Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (non ci sono i termini di grado 2)

— o — o —

ANALISI 2 – LEZIONE 23

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), h \rangle + \frac{1}{2} q(h) + o(\|h\|^2)$$

↑ forma quadratica associata a $Hf(x_0)$

Fatto 1 Se $\nabla f(x_0) = 0$ e $Hf(x_0) > 0$, allora x_0 è p.to di min. loc.

Dalla formula abbiamo che $f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{1}{2} q(h) + r(h)$

dove

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{\|h\|^2} = 0$$

limite di n variabili

Ora la forma q è coerciva, cioè esiste $m > 0$ t.c.

$$q(h) \geq m \|h\|^2 \qquad \forall h \in \mathbb{R}^n$$

ma allora

$$f(x_0+h) - f(x_0) = \frac{1}{2} q(h) + r(h)$$

$$\geq \frac{m}{2} \|h\|^2 + r(h)$$

$$= \|h\|^2 \left\{ \frac{m}{2} + \frac{r(h)}{\|h\|^2} \right\}$$

Dal limite precedente sappiamo che

$$\exists r_0 > 0 \text{ t.c. } \frac{r(h)}{\|h\|^2} \geq -\frac{m}{4} \quad \text{se } \|h\| \leq r_0$$

e quindi

$$f(x_0+h) - f(x_0) \geq \|h\|^2 \left\{ \frac{m}{4} \right\} \geq 0 \qquad \forall h \text{ con } \|h\| \leq r_0$$

Quindi $f(x_0+h) \geq f(x_0)$ se $h \in B(x_0, r_0)$, con $>$ fuori dal centro

Fatto 2 Se $\nabla f(x_0)=0$ e $Hf(x_0)<0$, allora x_0 è p.to di max. loc.

Come prima $f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{1}{2} q(h) + r(h)$

Analogamente a prima $q(h) \le \boxed{-m} \|h\|^2$ con $m>0$

↑ + grande autovalore di $Hf(x_0)$

e quindi

$$f(x_0+h) - f(x_0) = \frac{1}{2} q(h) + r(h)$$

$$\le -\frac{1}{2} m \|h\|^2 + r(h)$$

$$= \|h\|^2 \left\{ -\frac{m}{2} + \frac{r(h)}{\|h\|^2} \right\}$$

Ora scegliamo $r_0>0$ t.c.

$$\frac{r(h)}{\|h\|^2} \le \frac{m}{4} \qquad \forall h \text{ con } \|h\| \le r_0 \quad (h \neq 0)$$

e concludiamo che

$$f(x_0+h) - f(x_0) \le \|h\|^2 \left(-\frac{m}{4}\right) \le 0 \qquad \text{se } \|h\| \le r_0$$

da cui $f(x_0+h) \le f(x_0)$ con < stretto se $h \neq 0$ e $\|h\| \le r_0$

Fatto 3' Se $\nabla f(x_0)=0$ e $Hf(x_0)$ è indefinita, allora x_0 non è né p.to di max, né p.to di min.

Per ipotesi sappiamo che esiste $h_1 \in \mathbb{R}^n$ t.c. $q(h_1)>0$

ed esiste $h_2 \in \mathbb{R}^n$ t.c. $q(h_2)<0$

Consideriamo gli omini x_0+th_1 e x_0+th_2

$$f(x_0+th_1) = f(x_0) + \frac{1}{2} q(th_1) + o(\|th_1\|^2)$$

$$= f(x_0) + \frac{1}{2} t^2 \underbrace{q(h_1)}_{>0} + o(t^2)$$

Per Analisi 1 abbiamo che $f(x_0+tR_1) > f(x_0)$ per $t \neq 0$ piccolo.
(questo ci dice che x_0 è un minimo di x_0)

Analogamente $f(x_0+tR_2) = f(x_0) + \frac{1}{2}t^2 \underbrace{q(R_2)}_{<0} + o(t^2)$

da cui $f(x_0+tR_2) < f(x_0)$ per $t \neq 0$ piccolo (questo ci dice che x_0 è un max)

Oss. In maniera del tutto analoga si deduce che
→ se c'è un autovalore +, allora x_0 non può essere pto di max
→ " " − , " " " min.

— o — o —

Funzioni vettoriali $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (↑ più variabili in arrivo (come dire che f ha m componenti $f = (f_1, \dots, f_m)$))

La definizione di differenziale non cambia molto.
Diciamo che f è differenziabile in x_0 se esiste una matrice A (m righe, n colonne) t.c.

$$f(x_0+R) = f(x_0) + AR + o(\|R\|)$$

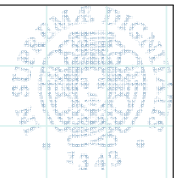
($f(x_0+R)$: vettore m-dimensionale; $f(x_0)$: vettore m dim.; AR: vettore n dim.; $o(\|R\|)$: vettore m-dimensionale)

Le righe di A sono i gradienti delle componenti di f.

Def. La matrice A si dice JACOBIANA della funzione f in x_0 e si indica con

$$A = Jf(x_0)$$

CHAIN RULE



Analisi 1 Data $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, allora

$$[g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Analisi 2 Data $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $g: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$, allora

$$J(g(f(x))) = [Jg](f(x)) \cdot [Jf](x)$$

Caso MOLTO SPECIALE: sia data $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Poniamo (funzioni date)

$$\varphi(t) = f(x(t), y(t))$$

Chi è la derivata di φ?

$$\varphi'(t) = f_x(x(t), y(t))\, \dot{x}(t) + f_y(x(t), y(t))\, \dot{y}(t)$$

Proseguendo si trova che

$$\varphi''(t) = [f_x(x(t), y(t))]' \dot{x}(t) + f_x(x(t), y(t))\, \ddot{x}(t) + [f_y(x(t), y(t))]' \dot{y}(t) + f_y(x(t), y(t))\, \ddot{y}(t)$$

$$= f_{xx}(x(t), y(t))\, \dot{x}(t)^2 + 2 f_{xy}(x(t), y(t))\, \dot{y}(t) \dot{x}(t) + f_{yy}(x(t), y(t))\, \dot{y}(t)^2 + f_x(x(t), y(t))\, \ddot{x}(t) + f_y(x(t), y(t))\, \ddot{y}(t)$$

Esercizio Interpretare in termini di Chain rule.

Dalla Chain Rule a Taylor

Consideriamo $\varphi(t) = f(tx, ty)$, in cui pensiamo x e y fissati e t variabile.
Allora, per Taylor–Lagrange di Analisi 1:

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + \frac{1}{2}\varphi''(c)t^2$$

e ponendo $t=1$ si ottiene

$$\begin{array}{ccccccc} \varphi(1) & = & \varphi(0) & + & \varphi'(0) & + & \frac{1}{2}\varphi''(c) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ f(x,y) & = & f(0,0) & + & f_x(0,0)\,x & + & f_y(0,0)\,y \end{array}$$

$$\varphi(t) = f(tx,ty) \rightsquigarrow \varphi'(t) = f_x(tx,ty)\,x + f_y(tx,ty)\,y$$

$$\varphi''(tx,ty) = f_{xx}(tx,ty)\,x^2 + 2f_{xy}(tx,ty)\,xy + f_{yy}(tx,ty)\,y^2$$

e quindi $\frac{1}{2}\varphi''(c) = \frac{1}{2}\left[f_{xx}(\dots)\,x^2 + 2f_{xy}(\dots)\,xy + f_{yy}(\dots)\,y^2\right]$

(c_x, c_y) che è un punto del segmento che congiunge $(0,0)$ con (x,y).

Procedendo allo stesso modo con le derivate di φ si ottengono gli sviluppi di f di ogni ordine con resto di Lagrange.

ANALISI 2 — LEZIONE 24

STUDIO LOCALE DI PUNTI STAZIONARI

Esempio 1 $f(x,y) = x+y^3-x^2y^2$ Det. i p.ti staz. e classificarli

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} 1-2xy^2=0 \\ 3y^2-2x^2y=0 \end{cases}$$

2ª equ: $y(3y-2x^2)=0$ → $y=0$ ⇝ incompatibile con 1ª equ
→ $y=\frac{2}{3}x^2$ ⇝ sostituisco nella 1ª

$$1 = 2xy^2 = 2x\frac{4}{9}x^4 = \frac{8}{9}x^5 \rightsquigarrow x^5 = \frac{9}{8}$$

$$\rightsquigarrow x = \sqrt[5]{\frac{9}{8}} \qquad y = \frac{2}{3}\sqrt[5]{\frac{81}{64}}$$ ⇝ esiste un unico p.to staz.

Classifichiamo il p.to. $Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -2y^2 & -4xy \\ -4xy & 6y-2x^2 \end{pmatrix}$

$$\text{Det} = -12y^3+4x^2y^2-16x^2y^2 = -12y^3-12x^2y^2$$

Sostituendo il p.to stazionario, che ha $x>0$ e $y>0$, troviamo
Det <0 ⇒ autovalori $= +-$ ⇒ il punto è una sella

Oss. Finché la matrice Hf ha autovalori $\neq 0$, il metodo funziona
I problemi nascono quando ci sono autovalori nulli

Esempio 2 $f(x,y) = \sin(xy)+\cos y$. Dimostrare che $(0,0)$ è stazionario e classificarlo.

Taylor: $f(x,y) = xy + 1 - \frac{1}{2}y^2 + o(x^2+y^2)$

$= 1 + xy - \frac{1}{2}y^2 + o(x^2+y^2)$

$(0,0)$ è stazionario perché non ci sono x e y.

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\dots + xy - \frac{1}{2}y^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{2}\left[f_{xx}\cdot x^2 + 2f_{xy}xy + f_{yy}\cdot y^2\right]$$

Det $< 0 \Rightarrow (0,0)$ è p.to di sella.

Per esercizio provare calcolando le derivate!

Esempio 3 $f(x,y) = x^2 \sin y + xy \arctan(x^2)$

Dim. che l'origine è stazionario e classificarlo.

Taylor di ordine 4 per esercizio:

$$f(x,y) = x^2y + x^3y + o((x^2+y^2)^2)$$

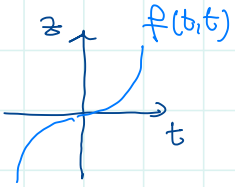
In particolare vediamo che $\nabla f(0,0) = (0,0)$ ✓ $\quad Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ∴ ↙ Hf non ci dice nulla

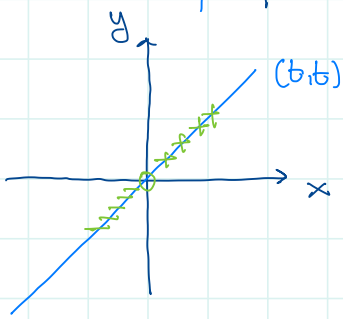
Usiamo un altro $f(t,t) = t^2 \sin t + t^2 \arctan(t^2)$

$$= t^3 + o(t^3)$$

$\rightsquigarrow f(t,t)$ ha un flesso ascendente nell'origine.

Questo basta per concludere che $(0,0)$ non è p.to di max / min





FATTO GENERALE Se Hf è nulla, ma i primi termini non nulli nello sviluppo di Taylor sono di grado DISPARI, allora il p.to non è max o min. Basta mandare altri del tipo (t,dt) per scoprirlo.

Esempio 4 $f(x,y) = xy^2 - yx^2 + \sin(x^2y^2) + \log(1+x^5)$

Taylor: $f(x,y) = \boxed{xy^2 - yx^2} + o(\rho^3)$

ordine 3

$f(t,t) = t^3 - t^3 + o(t^3) =$ ARGH !!

$f(t,2t) = 4t^3 - 2t^3 + o(t^3) = 2t^3 + o(t^3)$:)

↑ cambia segno come prima

Esempio 4 (varianti precedenti) $x^2 \pm y^4$ $\left(Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$, ma il comportamento è diverso

Esempio 5 $f(x,y) = x\sin x + \arctan(y^4) + y^3$

$(0,0)$ è stazionario $\rightsquigarrow$ classificarlo

Taylor $f(x,y) = x^2 - \frac{1}{6}x^4 + y^4 + y^3 + o(\rho^4) + o(\rho^5)$

$Df(0,0) = 0$ $\quad Hf = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$:((mai pensare $Hf \geq 0 \Rightarrow$ p.to min.)

Mando un arco parabolico

$f(t^2,t) = t^4 + t^4 + t^3 + o(t^4) = t^3 + o(t^4)$

↑ cambia segno

$\Rightarrow (0,0)$ non è max / min.

Oss. Anche $f(0,t) = t^3 + o(t^4)$ andava bene

Esempio 6 $x^2 + y^4 + x^3$ (questo è già il Taylor finale)

Ora l'origine è un p.to di min. locale

Posso scrivere $f(x,y) = x^2(1+x) + y^4$

$(1+x) > 0$ per x vicini a 0 (anzi, per ogni $x > -1$)

Quindi per $x > -1$ vale che $f(x,y) \geq 0 = f(0,0)$

e vale il segno di uguale se e solo se $x = 0$ (in questa zona)

Esempio 7 $x^2 + y^4 + x^2 y$

$x^2(1+y) + y^4$

per $y > -1$ vale ancora

$f(x,y) \geq 0 = f(0,0)$

$x^2 + y^4 + xy^2$

$= x^2 + xy^2 + \frac{y^4}{4} + \frac{3}{4}y^4$

$= \left(x + \frac{y^2}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^4$

$f(x,y) \geq 0$ e vale il segno di $=$ se e solo se $(x,y) = (0,0)$

$x^2 + y^4 + 3xy^2$

Mando $f(-t^2, t) = t^4 + t^4 - 3t^4 = -t^4$ $\rightsquigarrow$ vede un max

$f(t,0) = t^2$ $\rightsquigarrow$ vede un min

$\Rightarrow (0,0)$ è un p.to di sella

ANALISI 2 — LEZIONE 25

INTEGRALI DOPPI

1. Come si indicano
2. Significato geometrico
3. Idea della definizione
4. Come si calcolano

1 Notazioni

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy$$

$f(x,y)$: funzione INTEGRANDA

A: zona di integrazione

$dx\,dy$: variabili rispetto a cui integriamo

Intendiamo che $A \subseteq \mathbb{R}^2$ e $f : A \to \mathbb{R}$

Spesso si scrive con un solo integrale $\int_A f(x,y)\,dx\,dy$

Integrali **PROPRI** → l'insieme A è limitato
→ la funzione $f(x,y)$ è limitata, cioè $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $|f(x,y)| \le M \quad \forall (x,y) \in A$
(il grafico sta nella striscia $-M \le z \le M$)

Integrali **IMPROPRI** se fallisce una o entrambe le condizioni di sopra

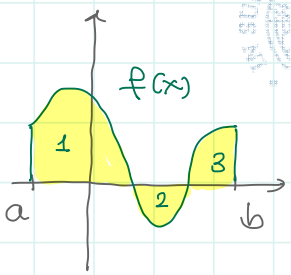
Esempi Se $A = [0,1] \times [0,1]$ e $Q = [0,+\infty) \times [0,+\infty)$, allora

$\iint_A (x^2+3xy)\,dx\,dy$ PROPRIO

$\iint_A \frac{1}{x^2+y^2}\,dx\,dy$ ↑ IMPROPRIO PER COLPA di $f(x,y)$

$\iint_Q \frac{1}{x^2+y^2+1}\,dx\,dy$ ↑ IMPROPRIO PER COLPA DELL'INSIEME (la funzione sarebbe limitata)

2 Significato geometrico



Analisi 1 $\int_a^b f(x)\,dx$ = "area con segno che sta tra il grafico e l'asse x"

= Area 1 + Area 3 − Area 2

Analisi 2 $\iint_A f(x,y)\,dx\,dy$ = "volume con segno tra grafico e piano base"

→ Se $f(x,y) \geq 0$ in A, allora è il volume della parte di spazio che sta sopra il piano base xy e sotto il grafico di $f(x,y)$, ovviamente limitandosi agli $(x,y) \in A$,

→ se $f(x,y)$ ha parti $+$ e parti $-$, allora i volumi delle parti con $f(x,y) \geq 0$ contano con il segno $+$, i volumi delle parti con $f(x,y) \leq 0$ contano con il segno $-$.

3 Idea della definizione

Ci sono 3 casi: → caso banale
→ caso semi-banale
→ caso generale

3.1 Caso banale:

L'insieme $A = [a,b] \times [c,d]$ (rettangolo)
$f(x,y) = \lambda$ (costante) per ogni $(x,y) \in A$

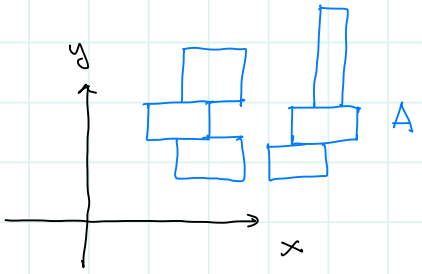
Stiamo in pratica calcolando il volume di un parallelepipedo

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \underbrace{(b-a)(d-c)}_{\text{Area rettangolo di base}} \cdot \underbrace{\lambda}_{\text{"altezza" con segno}}$$

3.2 Caso semibanale

A = unione finita di rettangoli (che si toccano al max sul bordo)

f = costante, eventualmente diversa da rettangolo a rettangolo.



Indichiamo con $R_i = [a_i, b_i] \times [c_i, d_i]$ e con λ_i i valori costanti su ogni rettangolo.

Il grafico diventa "un sistema di edifici o scavi a forma di parallelepipedo"

In questo caso si pone

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \text{"somma con segno dei volumi"} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(b_i - a_i)(d_i - c_i)}_{\text{Area}(R_i)} \underbrace{\lambda_i}_{\text{altezza con segno}}$$

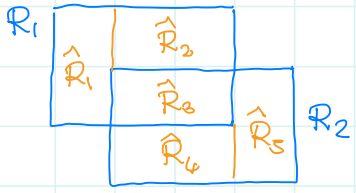
Queste funzioni si chiamano "funzioni a gradino" oppure "STEP FUNCTIONS"

Oss. Le combinazioni lineari di funzioni del caso banale (funzioni caratteristiche di rettangoli) sono step functions.

Oss. Se sommo una funzione che vale λ_1 su un ret. R_1 e " " " λ_2 " " " R_2

ottengo sempre una step function, anche se R_1 ed R_2 si intersecano di brutto.

Basta pensarla scomposta in un numero maggiore di rettangoli



3.3 Caso generale

A = insieme LIMITATO qualunque
f = funzione LIMITATA qualunque

In questo caso si costruiscono le SOMME DI DARBOUX superiori e inferiori e si pone

$$I^+(A,f) = \text{"integrale superiore di } f \text{ in } A\text{"}$$

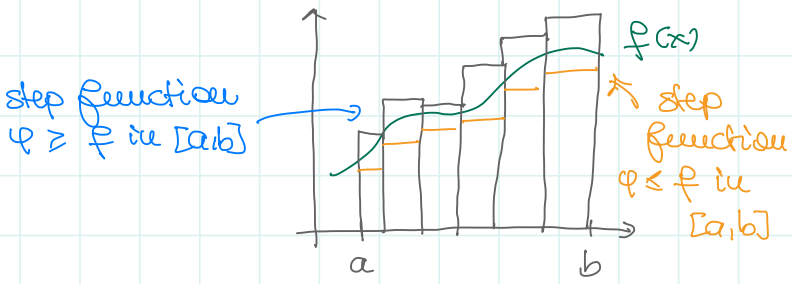
$$= \inf \left\{ \iint_B \varphi(x,y)\,dx\,dy \;:\; \varphi \text{ è una step function e } \varphi \geq f \text{ in } A \right\}$$

(B: dove φ è definita)

$$I^-(A,f) = \text{"integrale inferiore di } f \text{ in } A\text{"}$$

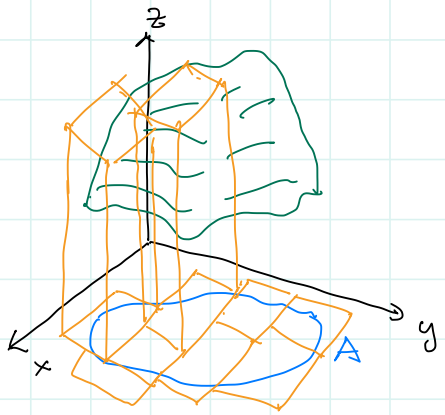
$$= \sup \left\{ \iint_B \varphi(x,y)\,dx\,dy \;:\; \varphi \text{ è una step function e } \varphi \leq f \text{ in } A \right\}.$$

Analogo di Analisi 1



Ad analisi 2 la situazione è più fastidiosa perché i rettangoli possono dover sporare rispetto all'insieme A.

Se l'insieme A è "fatto male" gli sforamenti sono necessari.



In generale accade che $I^-(f,A) \leq I^+(f,A)$

Se sono uguali, si dice che $f(x,y)$ è integrabile in A e il valore comune è l'integrale

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = I^+(f,A) = I^-(f,A)$$

↑ SE questo accade

Oss. Le ipotesi A limitato + f limitata servono per garantire l'esistenza di almeno una step function $\varphi \geq f$ e " " " " " $\varphi \leq f$

"Teorema" Se l'insieme A non è fatto troppo male e f è continua in A, allora f è integrabile in A.

Proprietà dell'integrale

① Linearità

$$\iint_A (f+g)\,dx\,dy = \iint_A f\,dx\,dy + \iint_A g\,dx\,dy$$

$$\iint_A \lambda f(x,y)\,dx\,dy = \lambda \iint_A f(x,y)\,dx\,dy$$

↑ numero

② Monotonia Se $f(x,y) \geq 0$ per ogni $(x,y) \in A$, allora

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy \geq 0$$

[quindi se $f \geq g$, anche $\iint_A f\,dx\,dy \geq \iint_A g\,dx\,dy$]

③ Additività rispetto zona di integrazione Se $A \cap B \overset{\text{o si intersecano solo al bordo}}{=} \emptyset$, allora

$$\iint_{A\cup B} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_A f(x,y)\,dx\,dy + \iint_B f(x,y)\,dx\,dy$$

ANALISI 2 – LEZIONE 26

4 Come calcolare gli integrali doppi

SLOGAN: un integrale doppio = due integrali singoli

FORMULE DI RIDUZIONE → Caso dei rettangoli
→ Caso insiemi normali
→ Caso generale

4.1 Formula di riduzione sui rettangoli

Sia $A = [a,b] \times [c,d]$. Allora

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_c^d dy\, f(x,y) = \int_c^d dy \int_a^b dx\, f(x,y)$$

Esempio 1 $A = [0,1] \times [2,4]$ $\quad f(x,y) = x^2 + xy$

$$\iint_A (x^2+xy)\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_2^4 dy\, (x^2+xy)$$

devo calcolare questo integrale rispetto alla variabile y, facendo finta che x sia costante

$$= \int_0^1 dx \left[x^2 y + x\frac{y^2}{2} \right]_{y=2}^{y=4}$$

primitiva di x^2+xy risp. a y

$$= \int_0^1 dx \left\{ 4x^2 + 8x - 2x^2 - 2x \right\}$$

$$= \int_0^1 (2x^2+6x)\,dx = \left[\frac{2}{3}x^3 + 3x^2 \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{2}{3} + 3 = \frac{11}{3}$$

In alternativa, mettendo la x "dentro":

$$\iint_A (x^2+xy)\,dx\,dy = \int_2^4 dy \int_0^1 dx\,(x^2+xy)$$

$$= \int_2^4 dy \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 y\right]_{x=0}^{x=1}$$

$$= \int_2^4 dy \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}y\right)$$

$$= \left[\frac{y}{3} + \frac{1}{4}y^2\right]_{y=2}^{y=4} = \frac{4}{3} + 4 - \frac{2}{3} - 1$$

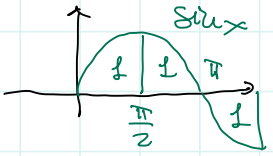
$$= \frac{2}{3} + 3 = \boxed{\frac{11}{3}}$$

Oss. I due procedimenti portano allo stesso risultato in maniera diversa, quindi È UN OTTIMO MODO PER CONTROLLARE I CONTI.

Esempio 2 $\quad A = [0,\pi] \times [0,2] \qquad f(x,y) = \sin x \cdot y^2$

$$\iint_A y^2 \sin x\,dx\,dy = \int_0^\pi dx \int_0^2 dy\, y^2 \sin x = \int_0^\pi dx \left[\frac{1}{3}y^3 \sin x\right]_{y=0}^{y=2}$$

$$= \frac{8}{3}\int_0^\pi \sin x\,dx = \frac{16}{3}$$



Scritto meglio:

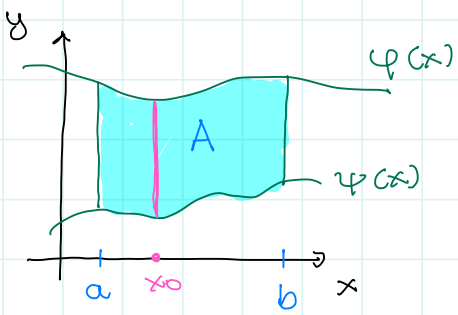
$$\iint_A y^2 \sin x\,dx\,dy = \int_0^\pi dx \int_0^2 dy\, y^2 \sin x = \int_0^\pi \sin x\,dx \int_0^2 y^2\,dy$$

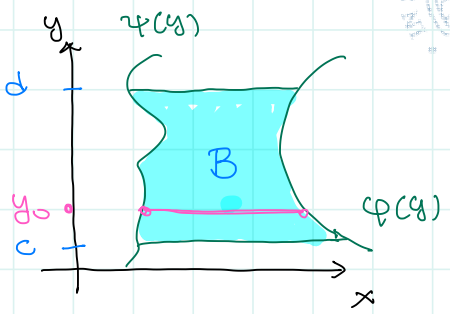
$$= \int_0^\pi \sin x\,dx \left[\frac{1}{3}y^3\right]_{y=0}^{y=2} = \frac{8}{3} \quad \ldots \text{ e da qui come prima}$$

$$\iint_A y^2 \sin x\,dx\,dy = \int_0^2 dy \int_0^\pi dx\, y^2 \sin x = \int_0^2 y^2\,dy \int_0^\pi \sin x\,dx$$

$$= 2\int_0^2 y^2\,dy = \frac{16}{3}. \qquad \left(\int_0^\pi \sin x\,dx = 2\right)$$

4.2 A = insieme normale rispetto all'asse x o all'asse y





$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ \psi(x) \le y \le \varphi(x)\}$$

INSIEME NORMALE RISPETTO ALL'ASSE x.

(fissato un qualunque $x_0 \in [a,b]$, l'intersezione di A con la retta $x = x_0$ è un segmento)

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \le y \le d,\ \psi(y) \le x \le \varphi(y)\}$$

INSIEME NORMALE RISPETTO ALL'ASSE y.

(le intersezioni di B con le rette $\parallel$ all'asse x sono segmenti)

Valgono le seguenti formule di riduzione (se A e B sono come sopra)

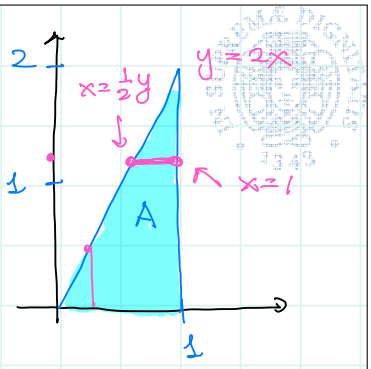
$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} dy\ f(x,y)$$

Devo fissare la primitiva rispetto ad y e poi sostituisco ad y gli estremi $\varphi(x)$ e $\psi(x)$

$$\iint_B f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_{\psi(y)}^{\varphi(y)} dx\ f(x,y)$$

Esempio 1 A = triangolo con vertici in $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,2)$

$f(x,y) = x^2 y^3$



L'insieme A è normale rispetto all'asse x

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2x\}$$

$$\iint_A x^2 y^3 \, dx\, dy = \int_0^1 dx \int_0^{2x} dy\ x^2 y^3 = \int_0^1 x^2 dx \int_0^{2x} y^3 dy$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^1 x^2 dx \left[y^4 \right]_{y=0}^{y=2x} = 4 \int_0^1 x^6 dx = 4 \left[\frac{x^7}{7} \right]_{x=0}^{x=1}$$

$$= \boxed{\frac{4}{7}}$$

In alternativa, l'insieme A è normale rispetto all'asse y

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 2,\ \frac{1}{2} y \le x \le 1\}$$

$$\iint_A x^2 y^3 \, dx\, dy = \int_0^2 dy \int_{\frac{1}{2}y}^1 dx\ x^2 y^3 = \int_0^2 y^3 dy \int_{\frac{1}{2}y}^1 x^2 dx$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^2 y^3 dy \left[x^3 \right]_{x=\frac{1}{2}y}^{x=1} = \frac{1}{3} \int_0^2 y^3 \left(1 - \frac{1}{8} y^3\right) dy$$

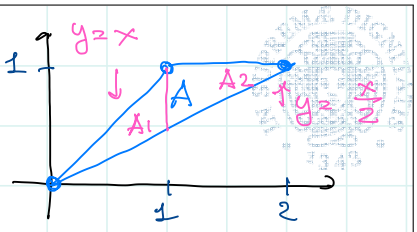
$$= \frac{1}{3} \int_0^2 \left(y^3 - \frac{y^6}{8}\right) dy = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{4} y^4 - \frac{1}{8} \frac{1}{7} y^7 \right]_0^2$$

$$= \frac{1}{3} \left[4 - \frac{16}{7} \right] = \frac{1}{3} \cdot \frac{12}{7} = \boxed{\frac{4}{7}}$$ ☺

Oss. Ancora una volta è venuto lo stesso risultato con due procedimenti diversi

Esempio 2 A = triangolo con vertici in $(0,0), (1,1), (2,1)$

$f(x,y) = (x,y)$



Scriviamo A come insieme normale.

Se lo voglio come normale asse x, devo spezzare in 2

$A = A_1 \cup A_2$ con $A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, \ \frac{x}{2} \le y \le x\}$

$A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le 2, \ \frac{x}{2} \le y \le 1\}$

e quindi l'integrale diventa

$$\iint_A (x+y)\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_{\frac{x}{2}}^{x} dy\,(x+y) + \int_1^2 dx \int_{\frac{x}{2}}^{1} dy\,(x+y)$$

↑ additività rispetto zona integrazione

In alternativa posso vedere A come normale rispetto asse y

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 1, \ y \le x \le 2y\}$$

$$\iint_A (x+y)\,dx\,dy = \int_0^1 dy \int_y^{2y} (x+y)\,dx = \int_0^1 dy \left[\frac{x^2}{2} + xy\right]_{x=y}^{x=2y}$$

$$= \int_0^1 \left(2y^2 + 2y^2 - \frac{1}{2}y^2 - y^2\right) dy = \frac{5}{2}\int_0^1 y^2\,dy = \boxed{\frac{5}{6}}$$

[controllare che venga lo stesso nell'altro modo]

— o — o —

ANALISI 2 — LEZIONE 27

INTEGRALI DOPPI IN COORDINATE POLARI

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_B f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,\rho\,d\rho\,d\theta$$

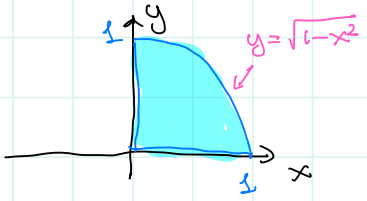
B: insieme A descritto in coord. polari

f: funzione f in coord. polari

ρ: PAGAMENTO

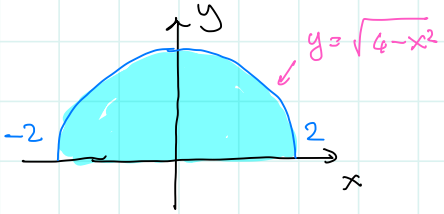
Descrizione di insiemi in coord. polari

Gli insiemi che si descrivono bene sono quelli a simmetria radiale



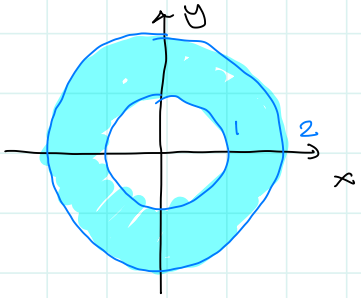
$0 \le \rho \le 1$

$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$



$0 \le \rho \le 2$

$0 \le \theta \le \pi$



$1 \le \rho \le 2$

$0 \le \theta \le 2\pi$

Esempio 1 A = insieme di sinistra $f(x,y) = x$

$$\iint_A x\,dx\,dy = \int_0^1 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta$$

descrizione di A in coord. polari

$\rho\cos\theta$: x in coord. polari

ρ: pagamento

$$= \int_0^1 \rho^2\,d\rho \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,d\theta}_{=1} = \int_0^1 \rho^2\,d\rho = \boxed{\frac{1}{3}}$$

Domanda: potevamo usare gli insiemi normali? SI !!

Normale asse x: $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}\}$

$$\iint_A x\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy\ x = \int_0^1 x\,dx \underbrace{\int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy}_{\text{integrale di 1 su un interv.} = \text{lungh. intervallo}}$$

$$= \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{x=0}^{x=1} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

↑ verificare la primitiva facendo la derivata

Normale asse y: $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le \sqrt{1-y^2}\}$

$$\iint_A x\,dx\,dy = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} dx\ x = \frac{1}{2}\int_0^1 dy\,\left[x^2\right]_{x=0}^{x=\sqrt{1-y^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-y^2)\,dy = \frac{1}{2}\left[y - \frac{1}{3}y^3\right]_{y=0}^{y=1}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

Esempio 2 A = insieme al centro $\quad f(x,y) = y^2$

$$\iint_A y^2\,dx\,dy = \boxed{\int_0^2 d\rho \int_0^{\pi} d\theta} \quad \boxed{\rho^2 \sin^2\theta} \quad \boxed{\rho}$$

insieme in coord. polari; y^2

$$= \int_0^2 \rho^3\,d\rho \boxed{\int_0^{\pi} \sin^2\theta\,d\theta} = \frac{\pi}{2}\int_0^2 \rho^3\,d\rho$$

$= \frac{\pi}{2}$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_{\rho=0}^{\rho=2} = \boxed{2\pi}$$

Fatto generale di Analisi 1

$$\int_a^b \cos^2\theta\, d\theta = \int_a^b \sin^2\theta\, d\theta = \frac{b-a}{2}$$

SE gli estremi a e b sono multipli interi di $\frac{\pi}{2}$

Idea fondamentale: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\, d\theta$ perché le due funzioni sono l'una simmetrica dell'altra

$\cos\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

[Lo stesso vale qui per ogni potenza]

Detto I il valore comune di questi 2 integrali, allora

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2\theta + \sin^2\theta)\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, d\theta = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\pi}{4}$$

[Qui è fondamentale il quadrato!!]

Lo stesso discorso vale su tutti gli intervalli $\left[k\frac{\pi}{2}, (k+1)\frac{\pi}{2}\right]$

Potevamo fare l'esempio 2 come insieme normale? Sì, quasi

Normale asse x: $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \le x \le 2,\ 0 \le y \le \sqrt{4-x^2}\}$

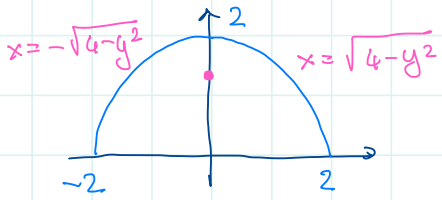
$$\iint_A y^2\, dx\, dy = \int_{-2}^{2} dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} y^2\, dy = \frac{1}{3}\int_{-2}^{2} dx \left[y^3\right]_{y=0}^{y=\sqrt{4-x^2}}$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-2}^{2} (4-x^2)\sqrt{4-x^2}\, dx = \text{ad analisi 1 si fa, con un po' di fatica}$$

Poniamo $x = 2\sin t \qquad dx = 2\cos t\, dt$

$$= \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^2 t \; 2\cos t \cdot 2\cos t \, dt = \frac{16}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \, dt = \dots$$

Normale asse y: $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 2, \; -\sqrt{4-y^2} \le x \le \sqrt{4-y^2}\}$

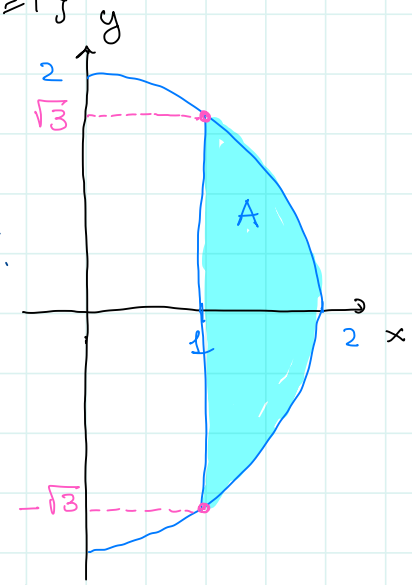


$$\iint_A y^2 \, dx\,dy = \int_0^2 dy \int_{-\sqrt{\dots}}^{\sqrt{\dots}} dx \; y^2 = \int_0^2 y^2 \, dy \int_{-\sqrt{\dots}}^{\sqrt{\dots}} dx$$

$$= 2\int_0^2 y^2\sqrt{4-y^2}\, dy = \text{con fatica si fa.}$$

Esempio 3 $f(x,y) = x+y$

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 4, \; x \ge 1\}$



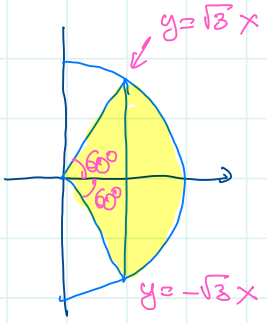
1° modo A è normale risp. asse x

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le 2, \; -\sqrt{4-x^2} \le y \le \sqrt{4-x^2}\}$.

2° modo A è normale risp. asse y

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -\sqrt{3} \le y \le \sqrt{3}, \; 1 \le x \le \sqrt{4-y^2}\}$

3° modo Scrivo A come differenza tra un settore circolare S e un triangolo T



S in coord polari è $0 \le \rho \le 2, \; -\frac{\pi}{3} \le \vartheta \le \frac{\pi}{3}$

T è $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, \; -\sqrt{3}x \le y \le \sqrt{3}x\}$

Seguendo questa idea otteniamo

$$\iint_A (x+y)\,dx\,dy = \iint_S (x+y)\,dx\,dy - \iint_T (x+y)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^2 d\rho \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta\, [\rho\cos\theta + \rho\sin\theta]\,\rho \quad \leftarrow \text{pagamento}$$

S in coord. polari

$$- \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{3}x}^{\sqrt{3}x} dy\,(x+y)$$

Entrambi gli integrali si calcolano senza problemi.

4° modo Polari dirette. Come scrivo A?

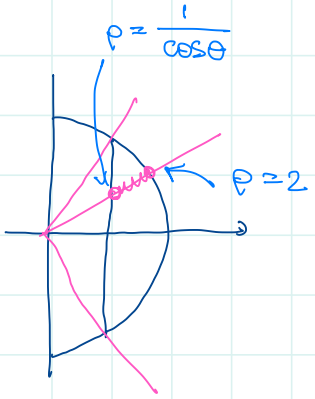
$$-\frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{1}{\cos\theta} \le \rho \le 2$$

$$x \ge 1$$

$$\rho\cos\theta \ge 1$$

$$\rho \ge \frac{1}{\cos\theta}$$



In questo modo

$$\iint_A (x+y)\,dx\,dy = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\cos\theta}}^{2} d\rho\, [\rho\cos\theta + \rho\sin\theta]\,\rho$$

Descrizione di A in coord. polari

[Esercizio: controllare che in questi 4 modi venga lo stesso numero].

— o — o —

ANALISI 2 – LEZIONE 28

Integrali tripli

1. Come si indicano
2. Significato geometrico / fisico
3. Idea della definizione
4. Come si calcolano

1 Notazioni

$$\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

↑ talvolta si mette un solo integrale

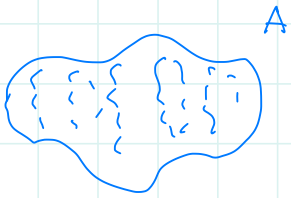
Si intende che

- $A \subseteq \mathbb{R}^3$ è l'insieme di integrazione
- $f : A \to \mathbb{R}$ è la funzione integranda.

L'integrale si dice PROPRIO se → A è limitato
→ f è limitata

altrimenti si dice IMPROPRIO.

2 Significato geometrico / fisico



Pensiamo A come un solido.
Se $f(x,y,z) \geq 0$, allora possiamo pensare che sia la densità del materiale che costituisce A.
Fare l'integrale equivale a calcolare la massa totale di A.

Se f ha segno variabile, possiamo pensare ad una densità di cariche elettriche. Fare l'integrale equivale a calcolare la carica totale.

3 Idea della definizione

3.1 Caso banale

A = parallelepipedo con lati // agli assi
$= [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$

$f(x,y,z) = \lambda$ costante in A

$$\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \underbrace{\text{Vol}(A)\cdot\lambda}_{\text{massa totale del mattone}}$$

3.2 Caso semibanale

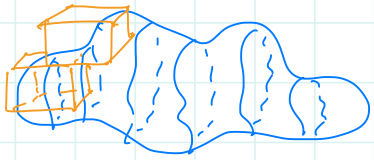
A = unione di mattoni "disgiunti"
$f(x,y,z)$ = costante eventualmente diversa da mattone a mattone

STEP FUNCTION

$$\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \text{somma dei singoli integrali}$$

3.3 Caso generale

A = generico insieme limitato
$f(x,y,z)$ = generica funzione limitata.



- Approssimiamo A con una unione di parallelepipedi, ovviamente sforando al bordo dove serve
- Su ogni mattone facciamo finta che f sia costante
  (a seconda che vogliamo approx. dall'alto o dal basso scegliamo una costante $\geq f$ o $\leq f$ su tutto il mattone)
- Calcoliamo la somma su tutti i mattoni e avremo una approssimazione dell'integrale
- Cerchiamo di migliorare l'approx. usando mattoni sempre più piccoli per adattarsi meglio alle variazioni di f.

Più formalmente, poniamo

$$I^+(f,A) = \inf\left\{ \iiint_B \varphi(x,y,z)\,dx\,dy\,dz : B \supseteq A \text{ è unione di parallelepipedi e } \varphi \text{ è una dep funzione con } \varphi \geq f \text{ in } A \right\}$$

$$I^-(f,A) = \sup\left\{ \iiint_B \varphi(x,y,z)\,dx\,dy\,dz : B \dots \varphi \leq f \text{ in } A \right\}.$$

In generale vale solo $I^-(f,A) \leq I^+(f,A)$.
Se vale il segno di uguale (e questo succede "spesso", ad esempio se A è decente ed f è continua in A), allora il valore comune è l'integrale richiesto.

Le proprietà base, cioè
→ linearità
→ monotonia
→ additività rispetto alla zona di integrazione
sono analoghe a quelle degli integrali doppi.

4 Tecniche di calcolo

Formule di riduzione

per fare un integrale triplo, si fanno 3 integrali singoli

→ caso dei parallelepipedi — $3 = 1+1+1$

→ integrazione per COLONNE (Cavalieri normali) — $3 = 2+1$ (integrale doppio di int. sing.)

→ integrazione per SEZIONI — $3 = 1+2$ (integrale sing. di int. doppio)

4.1 Integrale sui parallelepipedi

L'insieme A è del tipo $[a,b]\times[c,d]\times[e,f]$. Allora

$$\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f dz\; f(x,y,z)$$

Nota bene: ottengo 6 formule diverse a seconda dell'ordine in cui eseguo le integrazioni. Ad esempio un'altra formula è

$$\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_c^d dy \int_e^f dz \int_a^b dx\; f(x,y,z)$$

Esempio $A = [0,1]\times[0,2]\times[1,3]$ $\quad f(x,y,z) = y+xz$

$$\iiint_A (y+xz)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_1^3 dz\,(y+xz)$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^2 dy \left[yz + \tfrac{1}{2}xz^2\right]_{z=1}^{z=3}$$

primitiva rispetto a z

$$= \int_0^1 dx \int_0^2 dy\,(2y+4x)$$

$$= \int_0^1 dx \left[y^2+4xy\right]_{y=0}^{y=2} = \int_0^1 (4+8x)\,dx = \left[4x+4x^2\right]_0^1 = \boxed{8}$$

Tre alternativa spezziamo l'integrale in 2

$$\iiint_A y\,dx\,dy\,dz + \iiint_A xz\,dx\,dy\,dz$$

$$\iiint_A y\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 dx \int_1^3 dz \int_0^2 y\,dy = \int_0^1 dx \int_1^3 dz \left[\tfrac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{y=2}$$

$$= 2\int_0^1 dx \int_1^3 dz = 2\cdot 2 = 4$$

sto integrando la funzione 1, quindi viene l'area di $[0,1]\times[1,3]$

$$\iiint_A xz\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 dx \int_1^3 dz \int_0^2 dy\; xz$$

$$= \int_0^1 x\,dx \int_1^3 z\,dz \underbrace{\int_0^2 dy}_{\text{sto integrando 1, quindi viene 2}}$$

$$= 2\int_0^1 x\,dx \int_1^3 z\,dz = \int_0^1 x\,dx \,[z^2]_{z=1}^{z=3}$$

$$= 8\int_0^1 x\,dx = [4x^2]_{x=0}^{x=1} = 4$$

Sommando: $4+4 = 8$ ☺

Fatto generale sull'integrale di 1

- In una variabile $\int_a^b 1\,dx = b-a$ (= lunghezza intervallo)
- In due variabili $\iint_A 1\,dx\,dy = \text{Area}(A)$
  (geometricamente sarebbe il volume di un solido con base A e altezza uniforme 1)
- In tre variabili $\iiint_A 1\,dx\,dy\,dz = \text{Volume}(A)$
  (sarebbe la massa di un oggetto con densità costante uguale a 1)

Oss. (matematica) Il volume di un solido qualunque A si definisce proprio come l'integrale di 1 !!!

— o — o —

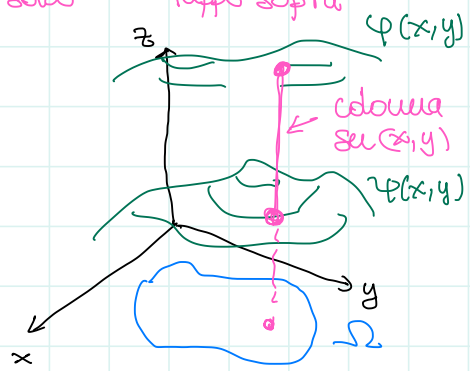
ANALISI 2 — LEZIONE 29

INTEGRALI PER COLONNE $\quad 3 = 2+1$

Def. Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^3$ si dice NORMALE rispetto al piano xy se si scrive nella forma

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \Omega,\ \psi(x,y) \le z \le \varphi(x,y)\}$$

(Ω: base; ψ: tappo sotto; φ: tappo sopra)



Si intende che

- $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ (piano base xy)
- $\psi : \Omega \to \mathbb{R}$ e $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ sono funzioni date

Geometricamente è una specie di cilindro che visto dall'alto si proietta su Ω, e le due funzioni φ e ψ descrivono le due basi superiori e inferiori

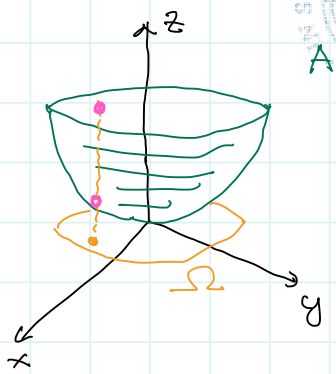
Oss. L'intersezione tra A e ogni retta parallela all'asse z è il segmento di estremi φ e ψ.

Formula per colonne

$$\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_\Omega dx\,dy \int_{\psi(x,y)}^{\varphi(x,y)} dz\ f(x,y,z)$$

Esempio 1 $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le z \le 1\}$

$f(x,y,z) = x^2+z$



Primo passo: capire l'insieme "z sotto 1" e "z sopra paraboloide"
Quindi A è una ciotola.
Questo è normale rispetto al piano xy con base il cerchio

$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1\}$

Posso quindi scrivere A come insieme normale

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \Omega,\ \underbrace{x^2+y^2 \le z \le 1}_{\text{colonna sul p.to } x,y}\}$$

Ora possiamo integrare

$$\iiint_A (x^2+z)\,dx\,dy\,dz = \iint_\Omega dx\,dy \int_{x^2+y^2}^{1} (x^2+z)\,dz$$

$$= \iint_\Omega dx\,dy \left[x^2 z + \frac{1}{2}z^2\right]_{z=x^2+y^2}^{z=1}$$

$$= \iint_\Omega dx\,dy \left(x^2 + \frac{1}{2} - x^2(x^2+y^2) - \frac{1}{2}(x^2+y^2)^2\right)$$

L'ultimo integrale si calcola in coord. polari e diventa

$$\underbrace{\int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} d\vartheta}_{\Omega \text{ in coord. polari}} \underbrace{\left(\rho^2\cos^2\vartheta + \frac{1}{2} - \rho^2\cos^2\vartheta \cdot \rho^2 - \frac{1}{2}\rho^4\right)}_{\text{funzione in coord. polari}} \boxed{\rho} \leftarrow \text{pagamento}$$

$$= \underbrace{\int_0^1 \rho^3 d\rho}_{\frac{1}{4}} \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2\vartheta\, d\vartheta}_{\pi} + \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^1 \rho\, d\rho}_{\text{area cerchio}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\vartheta}_{} - \underbrace{\int_0^1 \rho^5 d\rho}_{\frac{1}{6}} \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2\vartheta\, d\vartheta}_{\pi} - \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^1 \rho^5}_{\frac{1}{6}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\vartheta}_{2\pi}$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \pi\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}\right) = \boxed{\frac{5\pi}{12}}$$

INTEGRALI PER SEZIONI

Un insieme descritto per sezioni è qualcosa del tipo

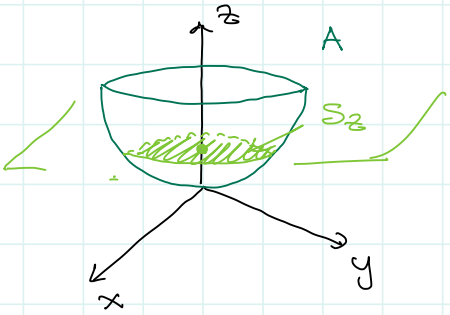
$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \le z \le b \,,\ (x,y) \in S_z\}$$

(a, b: min e max quota dei punti dell'insieme A; S_z: sezione di A ad altezza z)

La formula diventa

$$\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b dz \iint_{S_z} dx\,dy\; f(x,y,z)$$

<u>Esempio 1 bis</u> Tutto come prima

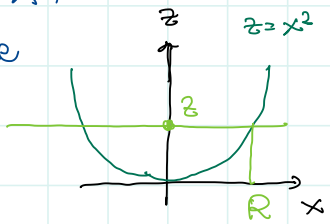


Primo passo: descrivere l'insieme per sezioni.

→ Chi sono la quota min e max?

$$0 \le z \le 1$$

→ Fissata una quota z, chi è la sezione S_z di A.
In questo caso è ovviamente un cerchio. Come dipende da z il raggio del cerchio?
Dalla figura vedo che il raggio di S_z è $\sqrt{z}$.
(proviamo a verificare con $z=0$ e $z=1$ per evitare errori banali)



Ora siamo pronti per integrare:

$$\iiint_A (x^2+z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 dz \iint_{S_z} (x^2+z)\,dx\,dy$$

A parte calcoliamo l'integrale interno

$$\iint_{S_z} (x^2+z)\,dx\,dy = \iint_{S_z} x^2\,dx\,dy + \iint_{S_z} z\,dx\,dy$$

$$= z \cdot \text{Area}(S_z) = z \cdot \pi z = \pi z^2$$

Resta da fare il 1° in coord. polari

$$\iint_{S_z} x^2\,dx\,dy = \int_0^{\sqrt{z}} d\rho \int_0^{2\pi} d\vartheta\ \rho^2\cos^2\vartheta\cdot\rho$$

$$= \int_0^{\sqrt{z}} \rho^3\,d\rho \underbrace{\int_0^{2\pi}\cos^2\vartheta\,d\vartheta}_{\pi} = \pi\int_0^{\sqrt{z}}\rho^3\,d\rho = \frac{\pi}{4}\left[\rho^4\right]_{\rho=0}^{\rho=\sqrt{z}}$$

$$= \frac{\pi}{4}z^2$$

Mettendo insieme i due pezzi

$$\iint_{S_z}(x^2+z)\,dx\,dy = \frac{\pi}{4}z^2 + \pi z^2 = \frac{5}{4}\pi z^2$$

Resta da fare $\int_0^1 \frac{5}{4}\pi z^2\,dz = \frac{5}{4}\pi\left[\frac{z^3}{3}\right]_{z=0}^{z=1} = \boxed{\frac{5\pi}{12}}$ ☺

Esempio 2 A = stesso insieme di prima

$f(x,y,z) = z^2$

Sezioni di sicuro! $\iiint_A z^2\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 dz \iint_{S_z} z^2\,dx\,dy$

$$= \int_0^1 z^2\,dz \iint_{S_z} dx\,dy = \int_0^1 z^2\cdot \underbrace{\text{Area}(S_z)}_{\pi z}\,dz$$

$$= \pi\int_0^1 z^3\,dz = \frac{\pi}{4}$$

Per colonne avremmo dovuto fare

$$\iiint_A z^2\,dx\,dy\,dz = \iint_\Omega dx\,dy \underbrace{\int_{x^2+y^2}^1 dz}_{\text{descrizione colonna}}\cdot z^2 = \frac{1}{3}\iint_\Omega dx\,dy\,\left[z^3\right]_{z=x^2+y^2}^{z=1}$$

$$= \frac{1}{3}\iint_\Omega (1-(x^2+y^2)^3)\,dx\,dy = \frac{1}{3}\text{Area}(\Omega) - \frac{1}{3}\iint_\Omega (x^2+y^2)^3\,dx\,dy$$

$$= \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3}\int_0^1 d\rho\int_0^{2\pi} d\vartheta\ \rho^6\cdot\rho = \frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}\int_0^1 \rho^7\,d\rho = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12} = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$ ☺

ANALISI 2 – LEZIONE 30

USO DELLE SIMMETRIE NEGLI INTEGRALI

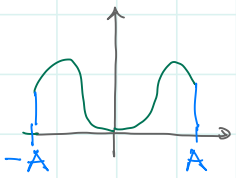
Analisi 1

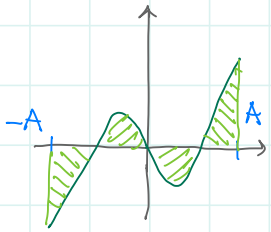
- Se $f(x)$ è una funzione PARI ($f(-x) = f(x)$), allora

$$\int_{-A}^{A} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{A} f(x)\,dx \qquad \forall A \geq 0$$

- Se $f(x)$ è una funzione DISPARI ($f(-x) = -f(x)$), allora

$$\int_{-A}^{A} f(x)\,dx = 0$$





Analisi 2 Stessa cosa per integrali doppi o tripli.

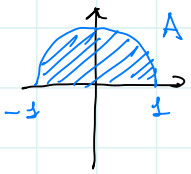
Ad esempio

- Se $A \subseteq \mathbb{R}^2$ è simmetrico risp. asse y ($(x,y) \in A \Leftrightarrow (-x,y) \in A$) e f è dispari in x (cioè $f(-x,y) = -f(x,y)$), allora

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = 0$$

- stesso discorso invertendo x e y.

Esempi



$$\iint_A x\,dx\,dy = 0$$

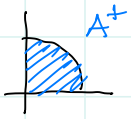
(Brutalmente: tanto x è positivo a dx quanto è negativo a sx)

Formalmente: A è simmetrico risp. asse y

$f(-x,y) = -f(x,y)$, cioè f è dispari in x

$\iint_A y\,dx\,dy > 0$ (per la proprietà di monotonia)

$= 2\iint_{A^+} y\,dx\,dy$



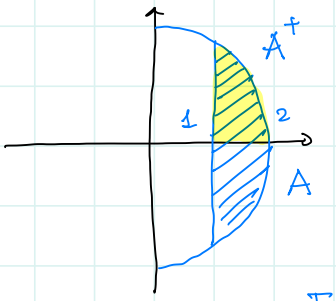
Formalmente: A è simmetrico risp. all'asse y

$f(-x,y) = f(x,y)$, cioè f è pari in x

$\iint_{A^+} x\,dx\,dy = \iint_{A^+} y\,dx\,dy$

Qui entra in gioco la simmetria rispetto alla bisettrice $y=x$ (se scambio x e y, l'insieme resta lo stesso e gli integrali si scambiano) (graficamente si ottengono l'uno dall'altro per simmetria).

Esempio 2



$\iint_A (x+y)\,dx\,dy = 2\iint_{A^+} x\,dx\,dy$

$\iint_A y\,dx\,dy = 0$

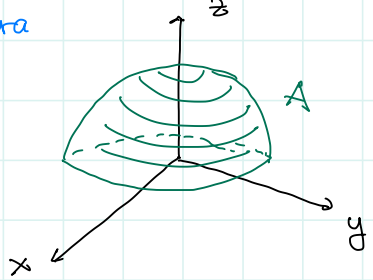
Formalmente: A è simmetrico risp. asse x e $f(x,-y) = -f(x,y)$, cioè f è dispari in y.

$\iint_A x\,dx\,dy = 2\iint_{A^+} x\,dx\,dy$ (se lo facessi come insieme normale rispetto all'asse x me ne accorgerei)

Esempio 3 $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2+y^2+z^2 \le 1}_{\text{dentro la sfera}}, \overbrace{z \ge 0}^{\text{sopra il piano xy}}\}$

$\iiint_A (x+y+z)\,dx\,dy\,dz$

L'insieme A è la semisfera alta



Osserviamo che $\iiint_A x\,dx\,dy\,dz = \iiint_A y\,dx\,dy\,dz = 0$ per simmetria

→ se cambio x con $-x$ l'insieme non cambia, cioè

$$(x,y,z) \in A \iff (-x,y,z) \in A$$

→ la funzione x è banalmente dispari in x

Questo basta per concludere che

$$\iiint_A x\,dx\,dy\,dz = 0, \text{ ma anche } \iiint_A x^{2021}\,dx\,dy\,dz = 0$$

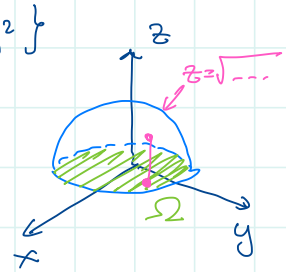
$$\text{e anche } \iiint_A \arctan(x^3)\,dx\,dy\,dz = 0$$

Discorso analogo vale per la variabile y. Quindi basta calcolare

$$\iiint_A z\,dx\,dy\,dz \quad \text{(e questo DEVE venire } > 0\text{)}$$

Calcoliamolo per colonne Devo descrivere A per colonne

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{(x,y) \in \Omega}_{\text{cerchio base}}, \quad 0 \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2}\}$$



$$\iiint_A z\,dx\,dy\,dz = \iint_\Omega dx\,dy \int_0^{\sqrt{\dots}} z\,dz$$

$$= \iint_\Omega dx\,dy\ \frac{1}{2}\left[z^2\right]_{z=0}^{z=\sqrt{\dots}}$$

$$= \frac{1}{2}\iint_\Omega (1-x^2-y^2)\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta\,(1-\rho^2)\rho$$

$$= \pi\int_0^1 (\rho-\rho^3)\,d\rho = \pi\left[\frac{1}{2}\rho^2 - \frac{1}{4}\rho^4\right]_{\rho=0}^{\rho=1} = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

Calcoliamo per sezioni

Intanto $0 \le z \le 1$

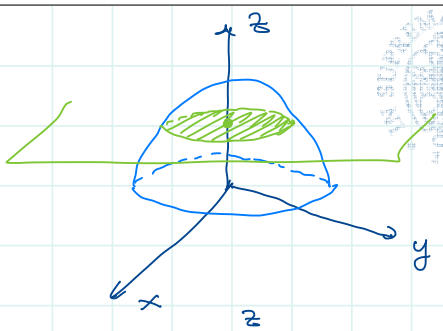
Fissato $z \in [0,1]$, la sezione S_z ad altezza z è un cerchio di raggio ...

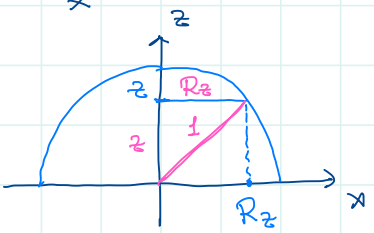
...

$R_z = \sqrt{1-z^2}$

(controllino: per $z=0 \rightsquigarrow R=1$

per $z=1 \rightsquigarrow R=0$)





$z^2 + R_z^2 = 1 \rightsquigarrow R_z = \sqrt{1-z^2}$

Possiamo ora calcolare l'integrale:

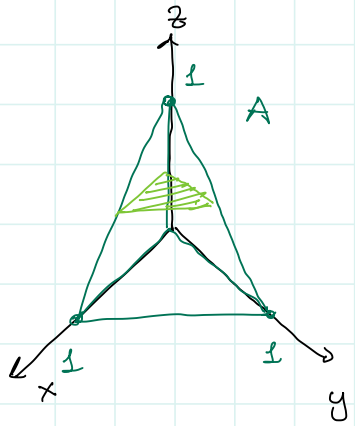
$$\iiint_A z \, dx\,dy\,dz = \int_0^1 dz \iint_{S_z} dx\,dy \; \boxed{z}$$

$$= \int_0^1 dz \; z \cdot \text{Area}(S_z) = \pi \int_0^1 z(1-z^2)\,dz$$

$$= \pi \left[\frac{1}{2} z^2 - \frac{1}{4} z^4 \right]_{z=0}^{z=1} = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

Esempio 4 $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x+y+z \le 1}_{\text{sotto il piano } x+y+z=1}, \underbrace{x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0}_{\text{ottante con tutto } \ge 0}\}$

$$\iiint_A (x+2y+7z)\,dx\,dy\,dz$$



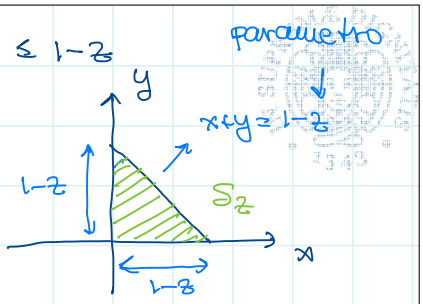
Osservazione fondamentale di simmetria:
se io permuto le variabili non cambia nulla, quindi

$$\iiint_A x \dots = \iiint_A y \dots = \iiint_A z \dots$$

e quindi $\iiint_A (x+2y+7z)\,dx\,dy\,dz = 10 \iiint_A z \, dx\,dy\,dz$

Questo lo calcolo bene per sezioni: $0 \le z \le 1$. Ad altezza z ottengo un triangolo. Fatto come?

Dall'equazione troviamo $x \geq 0$ $y \geq 0$ $x+y \leq 1-z$



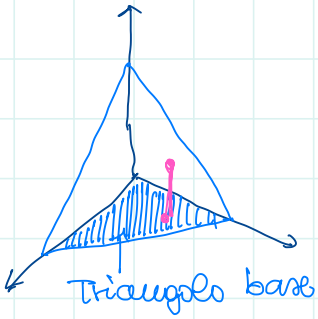
$$\iiint_A z \, dx\,dy\,dz = \int_0^1 dz \iint_{S_z} dx\,dy \; (z)$$

$$= \int_0^1 dz \; z \cdot \text{Area}(S_z)$$

↑ triangolo

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 dz \; z(1-z)^2 = \text{si fa} \; \ddot\smile$$

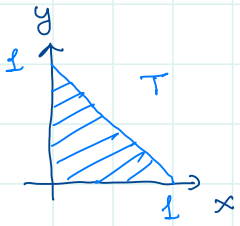
Potevo farlo per colonne? Sì!
La descrizione di A per colonne è



$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in T, \; 0 \leq z \leq 1-x-y\}$$

↑ triangolo base

$$\iiint_A z \, dx\,dy\,dz = \iint_T dx\,dy \int_0^{1-x-y} dz \; z$$



$$= \frac{1}{2}\iint_T (1-x-y)^2 \, dx\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \; (1-x-y)^2$$

= si fa, ma è + scomodo di prima
[Vedere se esercizio che venga uguale].

— o — o —

ANALISI 2 – LEZIONE 31

Integrali tripli in coord. cilindriche e sferiche

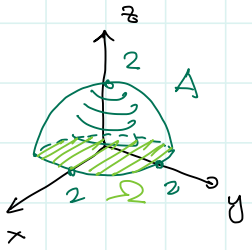
Coord. cilindriche ρ, θ, z (esatt. come coord. polari) $\qquad$ pagam. $= \rho$

Coord sferiche ρ, θ, φ $\qquad$ pagam. $= \rho^2 \cos\varphi$ ($\rho^2 \sin\varphi$ per i fisici)

$x = \rho \cos\varphi \cos\theta \qquad y = \rho \cos\varphi \sin\theta \qquad z = \rho \sin\varphi$

Oss. Ricordarsi che il pagamento è sempre ≥ 0 e infatti $\cos\varphi \geq 0$ per $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Esempio 1 $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 4,\ z \geq 0\}$



$$\iiint_A z^2 \, dx\,dy\,dz$$

1° modo | Per colonne

$$A = \{(x,y,z) : (x,y) \in \Omega,\ 0 \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}\}$$

Ω = cerchio base $x^2+y^2 \leq 4$

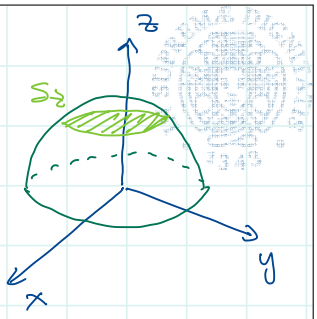
$$\iiint_A z^2 \, dx\,dy\,dz = \iint_\Omega dx\,dy \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz \; z^2 = \frac{1}{3} \iint_\Omega dx\,dy \, [z^3]_{z=0}^{z=\sqrt{\cdots}}$$

$$= \frac{1}{3} \iint_\Omega (4-x^2-y^2)^{3/2} \, dx\,dy \quad \text{si fa in coord. polari}$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \; (4-\rho^2)^{\frac{3}{2}} \rho \quad (\rho \text{ pag.}) = \frac{2\pi}{3} \int_0^2 \rho (4-\rho^2)^{\frac{3}{2}} \, d\rho$$

$$= \frac{2\pi}{3} \left[-(4-\rho^2)^{\frac{5}{2}} \frac{2}{5} \frac{1}{2} \right]_{\rho=0}^{\rho=2} = \frac{2\pi}{15} \, 4^{5/2} = \boxed{\frac{64}{15}\pi}$$

2° modo **Per sezioni**



$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le 2,\ \underbrace{x^2+y^2 \le 4-z^2}_{S_z = \text{cerchio di raggio } \sqrt{4-z^2}}\}$$

$$\iiint_A z^2\,dx\,dy\,dz = \int_0^2 dz \iint_{S_z} z^2\,dx\,dy = \int_0^2 z^2 \cdot \text{Area}(S_z) =$$

$$= \int_0^2 z^2 \pi (4-z^2)\,dz = \pi \int_0^2 (4z^2 - z^4)\,dz = \pi \left[\frac{4}{3}z^3 - \frac{1}{5}z^5\right]_{z=0}^{z=2}$$

$$= \pi\left(\frac{32}{3} - \frac{32}{5}\right) = 32\pi\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) = \boxed{\frac{64}{15}\pi}$$ ☺

3° modo **Coord. sferiche** Come si descrive A in tali coordinate?

$$\boxed{0 \le \rho \le 2 \qquad 0 \le \theta \le 2\pi \qquad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}}$$

↑↑ semisfera

$$\iiint_A z^2\,dx\,dy\,dz = \boxed{\int_0^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi}\ \boxed{\rho^2 \sin^2\varphi}\ \boxed{\rho^2 \cos\varphi}$$

descrizione di A in coord. sferiche — z^2 — pagamento

$$= \int_0^2 \rho^4 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi \cos\varphi\,d\varphi$$

$$= \int_0^2 \rho^4 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \left[\frac{1}{3}\sin^3\varphi\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^2 \rho^4 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2\pi}{3}\int_0^2 \rho^4 d\rho$$

$$= \frac{2\pi}{3}\left[\frac{1}{5}\rho^5\right]_{\rho=0}^{\rho=2} = \boxed{\frac{64}{15}\pi}$$

4° modo **Coord. cilindriche** (un po' buffo nella sfera 😉)

$0 \le z \le 2 \qquad \underbrace{0 \le \vartheta \le 2\pi \qquad 0 \le \rho \le \sqrt{4-z^2}}_{\text{Questo era } S_z}$

$$\iiint_A z \, dx\,dy\,dz = \int_0^2 dz \underbrace{\int_0^{2\pi} d\vartheta}_{2\pi} \int_0^{\sqrt{4-z^2}} d\rho \; z^2 \boxed{\rho}$$

↖ pag.

$$= 2\pi \int_0^2 z^2 \int_0^{\sqrt{4-z^2}} \rho \, d\rho = \pi \int_0^2 z^2 \left[\rho^2\right]_{\rho=0}^{\rho=\sqrt{4-z^2}}$$

$$= \pi \int_0^2 z^2 (4-z^2)\, dz$$

= da qui in poi (ma in realtà anche prima) coincide con il metodo per sezioni)

— o — o —

Esempio 2 Sia S tutta la sfera di raggio 2 e centro in $(0,0,0)$.
Calcolare

$$\iiint_S (x+y)^2 \, dx\,dy\,dz = \frac{256}{15}\pi$$

Si vede subito 😉 che è 4 volte il precedente !!!

$$\iiint_S (x^2+y^2+2xy)\, dx\,dy\,dz$$

$$\iiint_S xy \, dx\,dy\,dz = 0 \quad \text{per simmetria (è dispari in } x \text{ e } y)$$

$$\iiint_S x^2 \, d\ldots = \iiint_S y^2 \, d\ldots = \iiint_S z^2 \, d\ldots = 2\iiint_A z^2 \, dx\,dy\,dz$$

↑ per simmetria (se permuto le variabili, la sfera rimane la stessa)

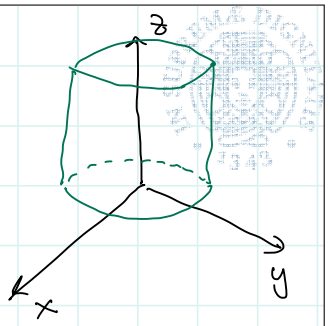
↑

↑ semisfera di prima

Esempio 3 C = cilindro come in figura

Raggio base: 1

Altezza: $[0,3]$



$$\iiint_C x^2(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$$

1° modo **Coord. cilindriche** $0\le\rho\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le z\le 3$

$$\iiint_C \ldots = \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 dz\ \underbrace{\rho^2\cos^2\theta\,(\rho^2+z^2)}_{\text{form. in coord. cilindriche}} \cdot \underbrace{\rho}_{\uparrow \text{jacobiano}}$$

$$= \int_0^1 \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\,d\theta \int_0^3 (\rho^2+z^2)\,dz$$

$$\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta = \pi$$

$$= \pi\int_0^1 \rho^3 d\rho \left[\rho^2 z + \frac{1}{3}z^3\right]_{z=0}^{z=3} = \pi\int_0^1 \rho^3\left(3\rho^2+9\right)d\rho$$

$$= \pi\int_0^1 \left(3\rho^5+9\rho^3\right)d\rho = \pi\left(\frac{1}{2}+\frac{9}{4}\right) = \boxed{\frac{11}{4}\pi}$$

2° modo **Per colonne**

$$\iiint_C \ldots = \iint_\Omega dx\,dy \int_0^3 dz\ x^2(x^2+y^2+z^2)$$

Ω ↑ base

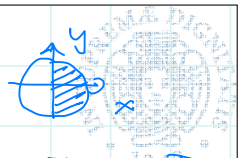
$$= \iint_\Omega dx\,dy\ x^2\left[zx^2+zy^2+\frac{1}{3}z^3\right]_{z=0}^{z=3}$$

$$= \iint_\Omega x^2\left(3x^2+3y^2+9\right)$$

$$= \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta\ \rho^2\cos^2\theta\left(3\rho^2+9\right)\rho$$

e da qui è lo stesso di prima

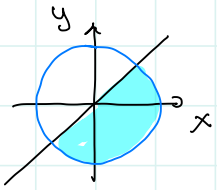
Esempi di descrizioni in coord. sferiche



$x^2+y^2+z^2 \le 2, \quad x \ge 0, z \le 0$ $\quad 0 \le \rho \le \sqrt{2}, \ -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le 0, \ -\frac{\pi}{2} \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}$

$1 \le x^2+y^2+z^2 \le 3$ $\quad 1 \le \rho \le \sqrt{3}, \ 0 \le \vartheta \le 2\pi, \ -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$
(corona sferica)

$x^2+y^2+z^2 \le 4, \quad x \ge y$ $\quad 0 \le \rho \le 2, \ -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$



$-\frac{3\pi}{4} \le \vartheta \le \frac{\pi}{4}$

$\frac{5\pi}{4} \le \vartheta \le \frac{9\pi}{4}$

$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le 5, \ x \le 0, \ |z| \le 3\}$

In coord. cilindriche diventa: $0 \le \rho \le \sqrt{5}, \ -3 \le z \le 3, \ \frac{\pi}{2} \le \vartheta \le \frac{3\pi}{2}$

— o — o —

ANALISI 2 — LEZIONE 32

CAMBI DI VARIABILE IN GENERALE

Scrivo la formula per integrali doppi (per quelli tripli è uguale)

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_B g(u,v)\,J(u,v)\,du\,dv$$

B: insieme A descritto nelle nuove coord. u e v

$g(u,v)$: funzione f scritta nelle nuove coordinate

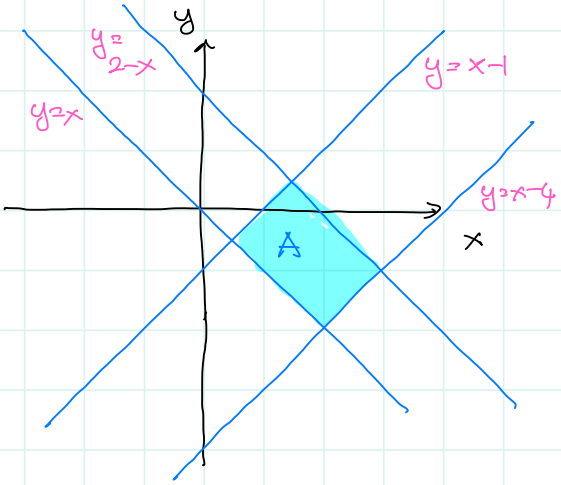
$J(u,v)$: pagamento

Come determino $J(u,v)$? In 3 fasi

1. Ricavare
2. Matrice jacobiana
3. Determinante

Esempio 1 $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x+y \le 2,\ 1 \le x-y \le 4\}$

Calcolare $\iint_A (x^2-y^2)\,dx\,dy$



Volendo, spezzando in 3 l'insieme A diventa normale rispetto all'asse x

$0 \le \underbrace{x+y}_{u} \le 2 \qquad 1 \le \underbrace{x-y}_{v} \le 4$

$x^2-y^2 = (x+y)(x-y) = uv$

$$\iint_A (x^2-y^2)\,dx\,dy = \int_0^2 du \int_1^4 dv$$

uv: stessa funz. in u e v

$J(u,v)$

Insieme A nelle nuove coord.

Procedura per il calcolo di $J(u,v)$

① Ricavare x e y in funzione di u e v

$$\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \end{cases}$$

② Costruire la matrice jacobiana della trasformazione

$$\begin{pmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

③ Calcolo il valore assoluto del determinante

$$J(u,v) = |\text{Det}| = \left| -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right| = \frac{1}{2}$$

Nel nostro caso resta

$$\int_0^2 du \int_1^4 dv \; uv \, \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \int_0^2 u \, du \, [v^2]_{v=1}^{v=4} = \frac{15}{4} \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^2 = \frac{15}{2}$$

— o — o —

Esempio 2 In coord. polari $x = \rho\cos\theta$ $y = \rho\sin\theta$

① Ricavare vs già fatto

② Matrice jacobiana

$$\begin{pmatrix} x_\rho & x_\theta \\ y_\rho & y_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}$$

③ Determinante

$$J(\rho,\theta) = |\rho\cos^2\theta + \rho\sin^2\theta| = \rho \quad \ddot{\smile}$$

— o — o —

Esempio 3 Sia C la circonferenza con centro in $(2,1)$ e raggio 3. Calcolare

$$\iint_C y^2\,dx\,dy$$

Scrivo l'eq. della circ. $\underset{u}{(x-2)}^2 + \underset{v}{(y-1)}^2 = 9$

$$\iint_C y^2\,dx\,dy = \underbrace{\iint_{u^2+v^2\le 9} du\,dv}_{\text{nuovo insieme}} \cdot \underbrace{(v+1)^2}_{y^2} \cdot \underbrace{1}_{\uparrow J}$$

$$= \iint_{u^2+v^2\le 9} (v^2+2v+1)\,du\,dv = 9\pi + \iint_{u^2+v^2\le 9} v^2\,du\,dv$$

$2v$: 0 per simmetria; 1: Area cerchio $= 9\pi$; v^2: si fa.

Giustifichiamo il J

① Ricavare $u = x-2$, $v = y-1$ $\rightsquigarrow$ $x = u+2$, $y = v+1$

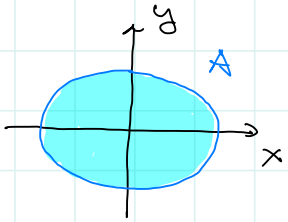
② Matrice

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

③ $|\text{Det}| = 1$

Fatto generale Se la trasformazione è una traslazione, allora $J = 1$ perché la matrice è l'identità

Esempio 4 $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + 3y^2 \le 4\}$



Calcolare $\iint_A (x+y)^2\,dx\,dy$

$$\underset{u}{(\sqrt{2}x)}^2 + \underset{v}{(\sqrt{3}y)}^2 \le 4$$

$$B = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2+v^2 \le 4\}$$

$$\iint_A (x+y)^2\,dx\,dy = \iint_B \left(\frac{u}{\sqrt{2}} + \frac{v}{\sqrt{3}}\right)^2 J(u,v)\,du\,dv$$

① Ricavare $u = \sqrt{2}x$ $\quad x = \frac{u}{\sqrt{2}}$

$v = \sqrt{3}y$ $\quad y = \frac{v}{\sqrt{3}}$

② Matrice jacobiana $\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

③ $|\text{Det}| = \frac{1}{\sqrt{6}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \iint_B \left(\frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{3} + 2\frac{uv}{\sqrt{6}}\right) du\,dv$$

$\downarrow$ 0 per simmetria

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\frac{5}{6} \iint_B u^2\,du\,dv$$

↑ (o v^2, che è lo stesso)

$$= \frac{5}{6\sqrt{6}} \int_0^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta\, \rho^2\cos^2\theta \cdot \rho = \frac{5}{6\sqrt{6}}\,\pi \int_0^2 \rho^3\,d\rho$$

$$= \frac{5}{6\sqrt{6}}\,\pi \cdot \frac{16}{4} = \dots$$

Provare per esercizio a farlo come insieme normale.

FATTO GENERALE Se il cambio di variabili è del tipo

$u = ax + \alpha$

$v = by + \beta$

allora la matrice è diagonale e $J(u,v)$ è un numero.

Esempio 5 A = sfera con centro in $(1,2,3)$ e passante per l'origine.

Calcolare

$$\iiint_A z \, dx\,dy\,dz$$

$1^2+2^2+3^2$ = 14

L'equazione della sfera è $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 14$

u v w

Detta B la sfera con centro in $(0,0,0)$ e raggio $\sqrt{14}$, viene

$$\iiint_A z \, dx\,dy\,dz = \iiint_B (w+3) \cdot 1 \, du\,dv\,dw$$

z = $w+3$; $J(u,v,w)$ perché la trasformazione è una traslazione

$$= 3 \cdot \text{Volume sfera} = 3 \cdot \frac{4}{3}\pi \, 14\sqrt{14} = 56\sqrt{14}\,\pi$$

— o — o —

Brutalmente, perché viene fuori un determinante?

Supponiamo $x = au + bv$

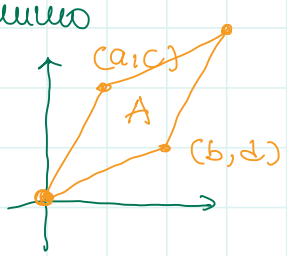
$y = cu + dv$

cioè supponiamo che la trasformazione sia lineare.

Supponiamo che la funzione da integrare sia 1 (costante), quindi $f(x,y) \equiv 1$ e $g(u,v) \equiv 1$.

Supponiamo che $B = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le 1\}$.

Domanda: chi sarebbe A? Con un minimo di algebra lineare, si vede che è un parallelogrammo



$$\iint_A 1 \, dx\,dy = \text{Area parall.} = |ad-bc|$$

$$\iint_B 1 \cdot J \, du\,dv = J \rightsquigarrow J = |ad-bc|$$

Con Taylor e la costruzione dell'integrale il discorso si generalizza

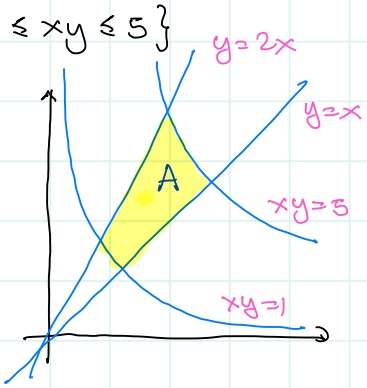
— o — o —

ANALISI 2 – LEZIONE 33

Modo alternativo di calcolare J

Esempio 1 $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \le y \le 2x, \ 1 \le xy \le 5\}$

Calcolare Area (A)



Vederlo come insieme normale è complicato

$1 \le \underbrace{\frac{y}{x}}_{u} \le 2 \qquad 1 \le \underbrace{xy}_{v} \le 5$

$$\iint_A 1 \, dx\,dy = \iint_B 1 \cdot J(u,v)\, du\,dv$$

$$B = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le u \le 2, \ 1 \le v \le 5\}$$

① Ricavare $\begin{cases} u = \frac{y}{x} \\ v = xy \end{cases}$ $\qquad y = \sqrt{uv} = \sqrt{v}\cdot\sqrt{u}$, $\quad x = \sqrt{\frac{v}{u}} = \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}}$

② Matrice jacobiana $\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \\ -\frac{\sqrt{v}}{2u\sqrt{u}} & \frac{1}{2\sqrt{u}\sqrt{v}} \end{pmatrix}$

③ $J(u,v) = |\text{Det}| = \left|\frac{1}{4u} + \frac{1}{4u}\right| = \frac{1}{2u}$

Conclusione $\text{Area}(A) = \iint_B \frac{1}{2u}\, du\,dv = \int_1^2 \frac{1}{2u}\, du \int_1^5 dv$

$= \boxed{2 \log 2}$ $\qquad (\int_1^5 dv = 4)$

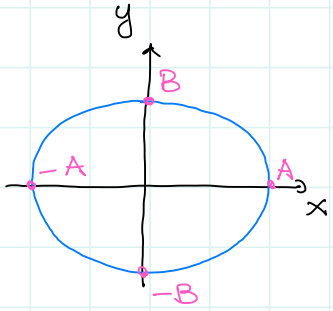
Modo alternativo di calcolare J. Partito da $u = \frac{y}{x} \qquad v = xy$

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ y & x \end{pmatrix}$$

$$|\text{Det}| = \left| -2\frac{y}{x} \right| = 2u$$

Ora il vero J è $\frac{1}{J_{\text{abusivo}}} = \frac{1}{2u}$ ☺

[Ci sta sotto il fatto che la trasformazione inversa ha come matrice jacobiana la matrice inversa e il det. dell'inversa è il reciproco del determinante]



<u>Esempio 2</u> Calcolare l'area dell'ellisse con semiassi A e B

Chiamo E la figura, che avrà equazione

$$\underbrace{\left(\frac{x}{A}\right)^2}_{u} + \underbrace{\left(\frac{y}{B}\right)^2}_{v} \leq 1$$

$$\text{Area}(E) = \iint_E 1\,dx\,dy = \iint_F 1 \cdot J(u,v)\,du\,dv$$

(F: $u^2+v^2 \leq 1$; $J(u,v) = A \cdot B$)

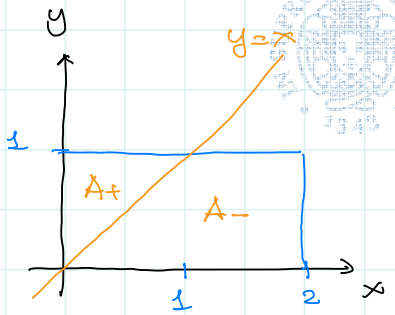
$$= AB \cdot \iint_F 1\,du\,dv = \boxed{\pi AB}$$

<u>Oss.</u> Quando $A = B = R$, otteniamo la classica area del cerchio.

<u>Oss.</u> In $\mathbb{R}^3$ il volume di $\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 + \left(\frac{z}{C}\right)^2 \leq 1$ è

$$\boxed{\frac{4}{3}\pi ABC}$$

INTEGRALI CON VALORI ASSOLUTI



Esempio 3 $A = [0,2] \times [0,1]$

Calcolare

$$\iint_A |y-x|\,dx\,dy$$

SLOGAN: SPEZZARE PER TOGLIERE IL VALORE ASSOLUTO

$$A_+ = \{(x,y) \in A : \ y-x \geq 0\}$$
$$A_- = \{(x,y) \in A : \ y-x \leq 0\}$$

Allora $\iint_A |y-x|\,dx\,dy = \iint_{A_+} (y-x)\,dx\,dy + \iint_{A_-} (x-y)\,dx\,dy$

($|y-x| = y-x$ in A_+; $|y-x| = x-y$ in A_-)

$$= \iint_{A_+} (y-x)\,dx\,dy - \iint_{A_-} (y-x)\,dx\,dy$$

(in questo modo l'integranda è sempre la stessa)

$$= \underbrace{\int_0^1 dx \int_x^1 dy\,(y-x)}_{\text{normale asse } x} - \underbrace{\int_0^1 dy \int_y^2 dx\,(y-x)}_{\text{Normale asse } y, \text{ per cui dovrò a sua volta dividere in due parti}}$$

2° modo Partiamo da $\iint_A |y-x| \ldots = \iint_{A_+} (y-x) - \iint_{A_-} (y-x)$

$$\iint_A (y-x) = \iint_{A_+} (y-x) + \iint_{A_-} (y-x)$$

Dalla seconda relazione: $\iint_{A_-} (y-x) = \iint_A (y-x) - \iint_{A_+} (y-x)$

e quindi, sostituendo nella prima

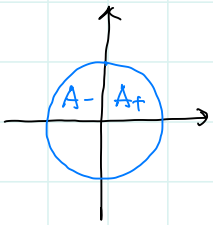
$$\iint_A |y-x|\,dx\,dy = 2\iint_{A_+}(y-x)\,dx\,dy - \iint_A (y-x)\,dx\,dy$$

$$= 2\int_0^1 dx \int_x^1 dy\,(y-x) - \int_0^2 dx \int_0^1 dy\,(y-x)$$

= si fa

Esempio 4 A = cerchio con centro in $(0,0)$ e raggio 2

$$\iint_A |x|\,dx\,dy$$



$$\iint_A |x|\,dx\,dy = \iint_{A_+} x\,dx\,dy - \iint_{A_-} x\,dx\,dy$$

Più brevemente, per simmetria

$$\iint_A |x|\,dx\,dy = 2\iint_{A_+} x\,dx\,dy = 4\iint_{\blacksquare} x\,dx\,dy =$$

↑ simmetria alto/basso

$$= 4\int_0^2 d\rho \int_0^{\pi/2} d\theta\, \rho\cos\theta \cdot \rho = 4\underbrace{\int_0^2 \rho^2 d\rho}_{\frac{8}{3}} \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta}_{1}$$

$$= \frac{32}{3}$$

Esempio 5 $\iiint_S |x|\,dx\,dy\,dz$ S = sfera con centro in $(0,0,0)$ e raggio 1

Sempre per simmetria

$$\iiint_S |x| = \iiint_S |y| = \iiint_S |z| = 2\iiint_{S_+} z\,dx\,dy\,dz$$

↑ semisfera alta, cioè quella con $z \geq 0$

$$= 2 \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\pi/2} d\varphi \; \underbrace{\rho \sin\varphi}_{\text{Jacobiano}} \; \underbrace{\rho^2 \cos\varphi}_{f}$$

$$= 2 \underbrace{\int_0^1 \rho^3 d\rho}_{\frac{1}{4}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\vartheta}_{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin\varphi \cos\varphi \, d\varphi = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\left[\frac{1}{2} \sin^2\varphi \right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2} = \frac{1}{2}$$

ANALISI 2 – LEZIONE 34

CALCOLO DI BARICENTRI E MOMENTI DI INERZIA

Def. Data una figura $F \subseteq \mathbb{R}^2$, il suo baricentro è il punto G di coordinate (x_G, y_G) date da

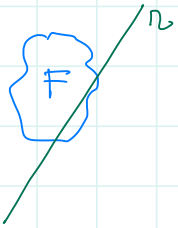
$$x_G := \frac{1}{\text{Area}(F)} \iint_F x \, dx dy \qquad y_G := \frac{1}{\text{Area}(F)} \iint_F y \, dx dy$$

Per i solidi $S \subseteq \mathbb{R}^3$ valgono formule analoghe, del tipo

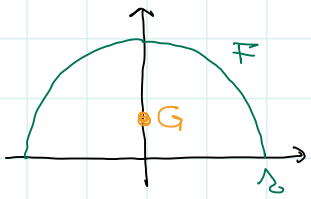
$$x_G := \frac{1}{\text{Vol}(S)} \iiint_S x \, dx dy dz \quad \text{e idem per } y_G \text{ e } z_G$$

Def. Data una figura F ed una retta r, si definisce momento di inerzia di F rispetto ad r l'integrale

$$\iint_F \text{dist}((x,y), r)^2 \, dx dy$$



Esempio 1 Baricentro di un semicerchio

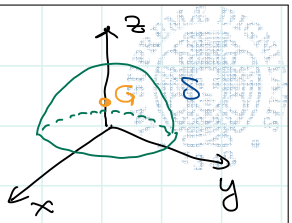


Per simmetria $x_G = 0$

$$\iint_F y \, dx dy = \int_0^r d\rho \int_0^\pi d\vartheta \, \rho \sin\vartheta \cdot \rho = \underbrace{\int_0^r \rho^2 d\rho}_{\frac{1}{3}r^3} \underbrace{\int_0^\pi \sin\vartheta \, d\vartheta}_{2} = \frac{2}{3} r^3$$

$$\text{Area}(F) = \frac{\pi}{2} r^2 \qquad y_G = \frac{2}{3} r^3 \cdot \frac{2}{\pi r^2} = \frac{4}{3\pi} r \quad \left(< \frac{r}{2} \right)$$

Esempio 2 Baricentro di una semisfera



Per simmetria $x_G = y_G = 0$

$$\iiint_S z\,dx\,dy\,dz = \int_0^r d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\ \rho \sin\varphi\ \rho^2 \cos\varphi$$

$$= \int_0^r \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi$$

$$\int_0^r \rho^3 d\rho = \frac{1}{4} r^4 \qquad \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \qquad \left[\frac{1}{2}\sin^2\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{4} r^4 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} r^4$$

Quindi $z_G = \dfrac{1}{\mathrm{vol}(S)} \iiint_S z \dots = \dfrac{1}{\frac{2}{3}\pi r^3} \cdot \dfrac{\pi}{4} r^4 = \dfrac{3}{8} r$

Oss Chi è più alto tra baricentro semicerchio e semisfera?

$$\frac{3}{8} \overset{?}{<} \frac{4}{3\pi} \iff 9\pi \overset{?}{<} 32 \qquad \text{OK}$$

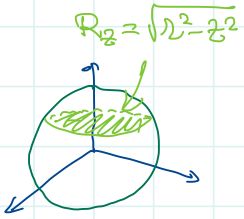
Questo era prevedibile geometricamente

Esempio 3 Calcolare il momento di inerzia di una sfera rispetto all'asse z

Per definizione $\iiint_S \mathrm{dist}((x,y), \text{asse } z)^2\, dx\,dy\,dz$

$$= \iiint_S (x^2+y^2)\, dx\,dy\,dz$$

1° modo Coordinate cilindriche



Descrizione della sfera

$x^2+y^2 \le r^2 - z^2$

$0 \le \theta \le 2\pi \qquad -r \le z \le r \qquad 0 \le \rho \le \sqrt{r^2 - z^2}$

$$\iiint_S (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{-r}^{r} dz \int_0^{\sqrt{r^2-z^2}} \underbrace{\rho^2}_{x^2+y^2} \cdot \underbrace{\rho}_{J}\, d\rho$$

$$= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{-r}^{r} dz \; \frac{1}{4}\left[\rho^4\right]_{\rho=0}^{\rho=\sqrt{r^2-z^2}}$$

$$= \frac{1}{4}\underbrace{\int_0^{2\pi} d\vartheta}_{2\pi} \int_{-r}^{r} dz\,(r^2-z^2)^2 = \frac{\pi}{2}\cdot 2\int_0^{r}(r^4-2r^2z^2+z^4)\,dz$$

$$= \pi\left[r^4 z - \frac{2}{3}r^2 z^3 + \frac{1}{5}z^5\right]_{z=0}^{z=r} = \pi r^5\left(1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right)$$

$$= \boxed{\frac{8\pi}{15}r^5}$$

2° modo Osservo che

$$\iiint_S (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = 2\iiint_{S} z^2\,dx\,dy\,dz$$

(↑ simmetria)

$$= 2\int_0^{r} d\rho \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\; \rho^2\sin^2\varphi\,\rho^2\cos\varphi$$

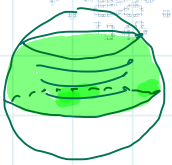
$$= 2\underbrace{\int_0^{r}\rho^4\,d\rho}_{\frac{1}{5}r^5}\underbrace{\int_0^{2\pi} d\vartheta}_{2\pi}\underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\cos\varphi\,d\varphi}_{\left[\frac{1}{3}\sin^3\varphi\right]_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\varphi=\frac{\pi}{2}}\;\frac{2}{3}} = 2\cdot\frac{1}{5}r^5\cdot 2\pi\cdot\frac{2}{3}$$

$$= \boxed{\frac{8}{15}\pi r^5}$$

Oss. Il momento di inerzia viene lo stesso rispetto a QUALUNQUE retta che passa per il centro
(per simmetria posso sempre mettere gli assi in modo che la retta sia l'asse z)

Esercizio Cercare di capire se per un cerchio in $\mathbb{R}^2$ la costante è + grande o + piccola (e poi calcolarla)

Esempio 4 Calcolare il volume della sfera, o meglio del segmento sferico



$$S_{a,b} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le r^2,\ a \le z \le b\}$$

Si fa equivalentemente per cilindriche o per sezioni

$$\text{Vol}(S_{a,b}) = \iiint_{S_{a,b}} 1 \, dx\,dy\,dz$$

$$= \int_a^b dz \ \text{Area}(S_z) = \pi \int_a^b (r^2 - z^2)\, dz$$

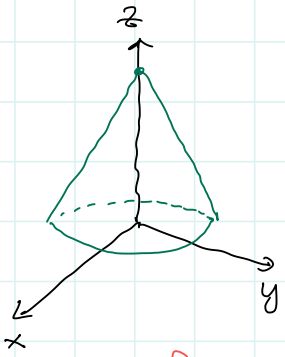
(S_z: cerchio di raggio $\sqrt{r^2-z^2}$)

$$= \pi \left[r^2 z - \frac{1}{3} z^3 \right]_{z=a}^{z=b} = \boxed{\pi \left\{ r^2(b-a) - \frac{1}{3}(b^3-a^3) \right\}}$$

Oss. Se voglio tutta la sfera prendo $b = r$ e $a = -r$ e trovo

$$\pi \left\{ 2r^3 - \frac{2}{3} r^3 \right\} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Esempio 5 Baricentro del cono con raggio base r ed altezza R.

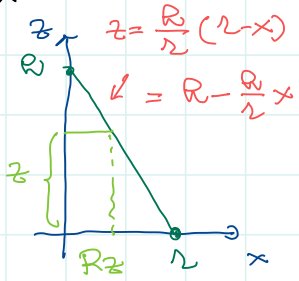


Diamo per buono $\text{Vol}(C) = \frac{1}{3}\pi r^2 R$ e che $x_G = y_G = 0$ per simmetria.

$$\iiint_C z \, dx\,dy\,dz = \int_0^R dz \ z \cdot \text{Area}(S_z)$$

$$= \int_0^R dz \ z\pi \frac{r^2 (R-z)^2}{R^2}$$

= si fa —



$$z = R - \frac{R}{r} R_z$$

$$-rz + rR = +RR_z$$

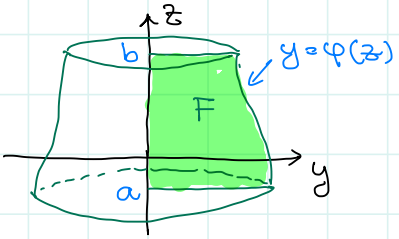
$$R_z = \frac{r(R-z)}{R}$$

Dividendo per il Vol(C) dovrebbe venire $\frac{1}{4} R$

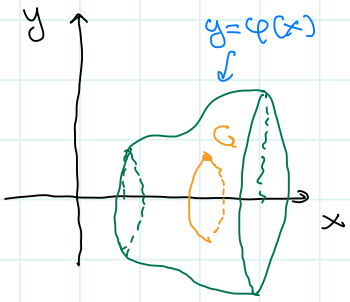
— o — o —

ANALISI 2 — LEZIONE 35

SOLIDI DI ROTAZIONE — TEOREMA DI GULDINO PER I VOLUMI



Consideriamo una figura piana F nel piano yz e la ruotiamo attorno all'asse z per ottenere un solido V.
Possiamo pensare anche ad una F nel piano xy che ruota intorno all'asse x.
Il caso speciale è quello di una figura F descritta da



$$F = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : a \le z \le b,\ 0 \le y \le \varphi(z)\} \text{ nel } 1^\circ \text{ caso}$$
$$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ 0 \le y \le \varphi(x)\} \text{ nel } 2^\circ \text{ caso.}$$

Equazione del solido di rotazione

In coord. cilindriche diventa

$$a \le z \le b$$
$$0 \le \theta \le 2\pi$$
$$0 \le \rho \le \varphi(z)$$

La sezione ad altezza z è un cerchio di raggio $\varphi(z)$

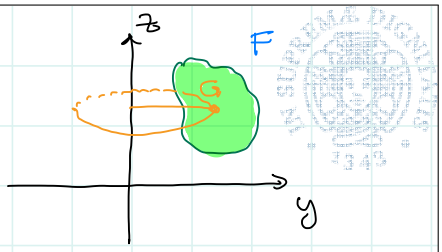
L'ultima equazione si può scrivere come

$$\sqrt{x^2+y^2} \le \varphi(z) \quad \text{o in modo equivalente}$$

$$\boxed{x^2+y^2 \le \varphi(z)^2}$$

Nel secondo scenario diventa $y^2+z^2 \le \varphi(x)^2$

Nel caso di una figura F più generale la descrizione in cilindriche diventa



$$0 \le \theta \le 2\pi \qquad (\rho, z) \in F$$

↑ distanza dall'asse z

Come calcolo il volume di un solido di rotazione?

Nel caso modello $$\mathrm{Vol}(V) = \pi \int_a^b \varphi(z)^2 dz$$

Nel caso più generale $$\mathrm{Vol}(V) = 2\pi \iint_F y \, dy\, dz$$

↑ distanza dall'asse di rotazione

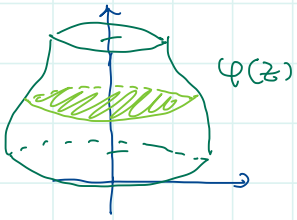
Teorema di GOLDINO 1 $$\mathrm{Vol}(V) = 2\pi y_G \cdot \mathrm{Area}(F)$$

↑ Vale anche per lo scenario in cui la rotazione è intorno all'asse x

$2\pi y_G$: lungh. della circ. percorsa da G durante la rotazione

$\mathrm{Area}(F)$: area della figura che ruota

Dim caso modello



$$\mathrm{Vol}(V) = \iiint_V 1 \, dx\, dy\, dz \overset{\text{sezioni}}{=} \int_a^b \mathrm{Area}(S_z)\, dz$$

↑ cerchio di raggio $\varphi(z)$

$$= \pi \int_a^b \varphi(z)^2 dz$$

In alternativa si poteva calcolare l'integrale con le coord. cilindriche!

$$\iiint_V 1\,dx\,dy\,dz = \int_a^b dz \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \int_0^{\varphi(z)} \rho\,d\rho \;\uparrow J = \pi \int_a^b \varphi(z)^2\,dz$$

$$\left[\tfrac{1}{2}\rho^2\right]_{\rho=0}^{\rho=\varphi(z)}$$

Dim caso generale Uso ancora le cilindriche

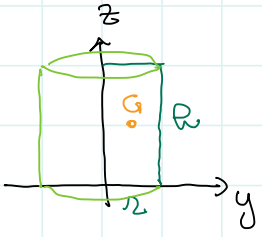
$$\iiint_V 1\,dx\,dy\,dz = \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \iint_{(\rho,z)\in F} d\rho\,dz\;\rho \uparrow J$$

$$= 2\pi \iint_F \rho\,d\rho\,dz = 2\pi \iint_F y\,dy\,dz$$

Dim Guldino dato il caso generale

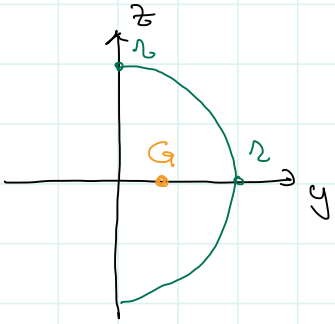
$$\text{Vol}(V) = 2\pi \iint_F y\,dy\,dz$$

$$= 2\pi \underbrace{\frac{1}{\text{Area}(F)} \iint_F y\,dy\,dz}_{\| \; y_G} \cdot \text{Area}(F)$$



Esempio 1 Cilindro

$$\text{Vol} = 2\pi\, y_G \cdot \text{area}(F) = 2\pi \frac{r}{2} rR = \pi r^2 R$$



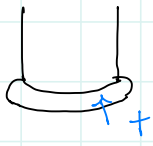
Esempio 2 Sfera

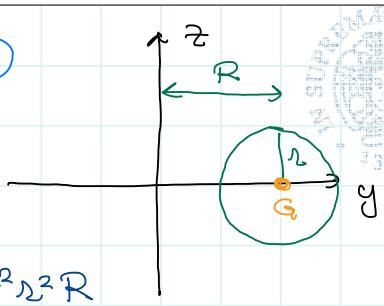
$$\text{Vol} = 2\pi\, y_G \cdot \text{area}(F) = \cancel{2\pi} \cdot \frac{4}{3\cancel{\pi}} r \cdot \frac{\pi r^2}{\cancel{2}}$$

y_G ↑ calcolato lez. prec.

$$= \frac{4}{3}\pi r^3$$

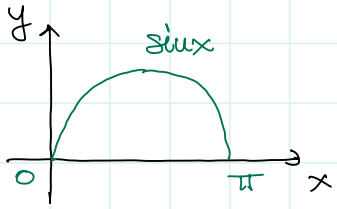
Esempio 3 Toro (ciambella)





$$\text{Vol} = 2\pi y_G \cdot \text{Area}(F) = 2\pi R \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 r^2 R$$

Esempio 4 Sia $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le \sin x\}$



Se ruotiamo di 360° intorno all'asse x, qual è il volume

$$\text{Vol} = \pi \int_a^b \varphi(x)^2 dx = \pi \int_0^\pi \sin^2 x\, dx = \frac{1}{2}\pi^2$$

Determinare le coord. del baricentro del solido ottenuto

Per simmetria sarà $x_G = \frac{\pi}{2}$ $\quad y_G = 0$ $\quad z_G = 0$

Se ruotiamo di 360° intorno all'asse y, qual è il volume

$$\text{Vol} = 2\pi \underbrace{x_G}_{\substack{\text{coord. x del} \\ \text{baricentro della} \\ \text{figura}}} \cdot \text{Area}(F) = 2\pi \frac{\pi}{2} \cdot 2 = 2\pi^2$$

Stesso scenario, determinare le coord. del baricentro

Per simmetria $x_G = z_G = 0$, cioè il baricentro sta sull'asse y.

Per calcolare y_G dovrei calcolare $\iiint_V y\, dx\, dy\, dz$

Uno sarebbe tentato di farlo per sezioni

$$\iiint_V y \, dx\,dy\,dz = \int_0^1 dy \; y \cdot \text{Area}(S_y)$$

S_y: sezione ad altezza y che è una corona circolare i cui raggi volendo si calcolano

In alternativa si può fare come insieme normale rispetto al piano xz o in coord. cilindriche

$$\iiint_V y \, dx\,dy\,dz = \iint_\Omega dx\,dz \int_{\sin(\sqrt{x^2+z^2})}^{0} y \, dy$$

$\sin(\sqrt{x^2+z^2})$: distanza dall'asse y

0: come è fatta la colonna?

$$= \frac{1}{2} \iint_\Omega \sin^2\left(\sqrt{x^2+z^2}\right) dx\,dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \; \sin^2(\rho) \cdot \rho_{\uparrow J}$$

= si fa

— o — o —

ANALISI 2 — LEZIONE 36

Esempi "delicati"

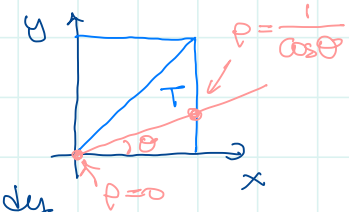
Esempio 1 Sia $Q = [0,1]^2$. Calcolare $\iint_Q \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$

valor medio in Q della distanza dall'origine

Conflitto: la funzione è bella in coord. polari
l'insieme è bello in coord. cartesiane

1° modo Integrare la radice in coord. cartesiane (si fa ad AM1)

2° modo Provare con le polari.



Per simmetria

$$\iint_Q \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = 2\iint_T \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

quindi basta descrivere T in coord. polari

Dove varia θ? $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$

Dove varia ρ? Abbiamo $x \le 1$, cioè $\rho\cos\theta \le 1$, cioè $\rho \le \frac{1}{\cos\theta}$

Quindi $\iint_T \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} d\rho \; \rho \cdot \rho$ (ρ = $\sqrt{x^2+y^2}$, J)

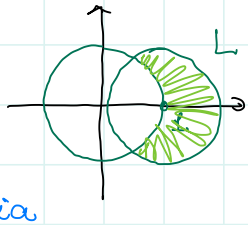
↑ Descrizione di T in coord. polari

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\rho^3\right]_{\rho=0}^{\rho=\frac{1}{\cos\theta}} = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^3\theta}\,d\theta = \text{Analisi 1}$$

$$\int \frac{1}{\cos^3\theta}\,d\theta = \int \frac{\cos\theta}{\cos^4\theta}\,d\theta = \int \frac{\cos\theta}{(1-\sin^2\theta)^2}\,d\theta \overset{t=\sin\theta}{=} \int \frac{dt}{(1-t^2)^2}$$

e questa si integra come funzione razionale

Esempio 2 Sia L come in figura.



Calcolare

$$\iint_L x\,dx\,dy \qquad \iint_L y\,dx\,dy = 0$$

↑ per simmetria

Problema: vedere L come insieme normale è antipatico

Scriviamo le eq. dei due cerchi

$$L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{x^2+y^2 \geq 1}_{\text{fuori dal cerchio di sinistra}}, \ \underbrace{(x-1)^2+y^2 \leq 1}_{\text{dentro il cerchio a destra}}\}$$

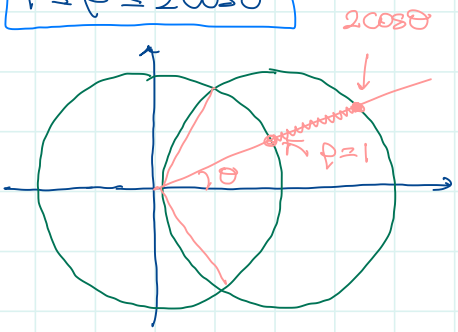
$$(x-1)^2+y^2 \leq 1 \iff x^2-2x+1+y^2 \leq 1 \iff x^2+y^2 \leq 2x$$

Quindi L si descrive come $1 \leq x^2+y^2 \leq 2x$, cioè

$1 \leq \rho^2 \leq 2\rho\cos\theta$

la quale a sua volta diventa

$\rho \geq 1 \qquad \rho \leq 2\cos\theta$, cioè $\boxed{1 \leq \rho \leq 2\cos\theta}$



Dove varia θ? $-\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$

Come ho trovato $\pm\frac{\pi}{3}$? Deve essere

$2\cos\theta \geq 1$, cioè $\cos\theta \geq \frac{1}{2}$, cioè $-\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ ☺

La descrizione di L in coord. polari è

$$-\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \qquad 1 \leq \rho \leq 2\cos\theta$$

$$\iint_L x\,dx\,dy = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_1^{2\cos\theta} \rho\cos\theta \cdot \rho\,d\rho = \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos\theta\,(8\cos^3\theta - 1)\,d\theta$$

= si fa ...

Esempio 3 (Esercizio della FOGNA)

$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+z^2 \le 1,\ y^2+z^2 \le 1\}$

= intersezione di 2 cilindri con lo stesso raggio e assi perpendicolari

Calcolare il volume di A

$$\mathrm{Vol}(A) = \iiint_A 1\,dx\,dy\,dz \overset{\text{sezioni}}{=} \int_{-1}^{1} dz\ \mathrm{Area}(S_z)$$

Capire come è fatta la sezione S_z fissato z.

Dalle equazioni troviamo $x^2 \le 1-z^2$ $\quad y^2 \le 1-z^2$

$$\left.\begin{aligned} -\sqrt{1-z^2} \le x \le \sqrt{1-z^2} \\ -\sqrt{\dots} \le y \le \sqrt{\dots} \end{aligned}\right\}$$ quadrato con centro in $(0,0)$ e "semilato" $\sqrt{1-z^2}$

(Geometricamente, sezionando ad altezza z, si ottengono due "rettangoli infiniti")

Quindi $\mathrm{Area}(S_z) = 4(1-z^2)$ e $\mathrm{Vol} = 4\int_{-1}^{1}(1-z^2)\,dz$!!!

2° modo Provo a scriverlo come insieme normale risp. al piano xy.

Intanto $\mathrm{Vol}(V) = 2\,\mathrm{Vol}(V_+)$ (↑ p.ti di V con $z \ge 0$)

Chi è la base Ω, cioè la proiezione di V sul piano xy?

Chiaramente $\Omega = [-1,1] \times [-1,1]$.

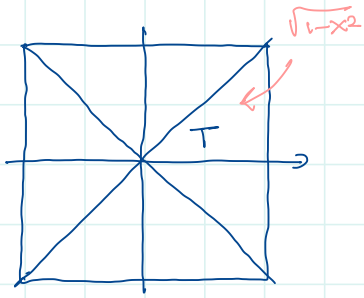
Chi è la colonna su un p.to $(x,y) \in \Omega$? Deve essere

$z^2 \le 1-x^2$ $\quad z^2 \le 1-y^2$

Quindi $z \le \min\{\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-y^2}\}$

Chi è il minimo varia da zona a zona.

Indicato con T il triangolo



$$\mathrm{Vol}(V) = 16 \iint_T \sqrt{1-x^2}\,dx\,dy$$

↑ su T la colonna è $0 \le z \le \sqrt{1-x^2}$

$$= 16 \int_0^1 dx \int_0^x dy \sqrt{1-x^2} = 16 \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$= 8 \left[-(1-x^2)^{\frac{3}{2}} \frac{2}{3} \right]_{x=0}^{x=1}$$

Controllare che venga lo stesso di prima.

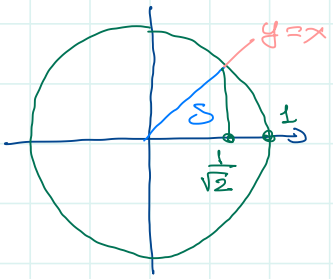
Esempio 4 $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le 1, y^2+z^2 \le 1, z^2+x^2 \le 1\}$

3 cilindri con assi ortogonali.

Grosso problema: le sezioni a z fisso non sono + quadrati, ma quadrati $\cap$ il nuovo cerchio $x^2+y^2 \le 1$.
[Si può fare, ma è delicato !!]

Si scrive il metodo come insieme normale, con l'unica variante che ora la base non è il quadrato, ma il cerchio $x^2+y^2 \le 1$

Come prima $\mathrm{Vol}(B) = 16 \iint_S \sqrt{1-x^2}\,dx\,dy$



Questo si può fare in coord polari ~~provare~~ oppure spezzando in 2

$$16 \left\{ \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dx \int_0^x dy \sqrt{1-x^2} + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \sqrt{1-x^2} \right\}$$

Entrambi gli integrali si calcolano facilmente !!

[Controllare che nei due modi venga lo stesso]

[Domanda: quante sono le facce di B ??]

— o — o —

ANALISI 2 – LEZIONE 37

CURVE **Def.** Una curva a valori in $\mathbb{R}^n$ è una funzione

$$\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

(1 variabile in partenza; n variabili in arrivo)

Brutalmente, una curva descrive la posizione che occupa un oggetto al tempo t.

Indichiamo $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$

($x_1, x_2, \dots, x_n$: componenti di γ, che sono tutte funzioni $x_i : [a,b] \to \mathbb{R}$)

Def. Si dice **SOSTEGNO** della curva l'immagine della curva stessa cioè

$$\text{sostegno}(\gamma) = \{ \gamma(t) : t \in [a,b] \} \subseteq \mathbb{R}^n$$

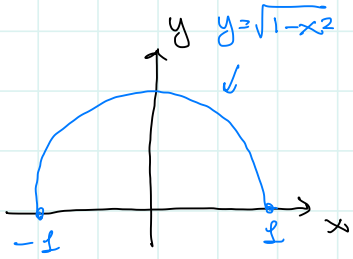
Attenzione! Non confondere mai una curva con il suo sostegno

Detto brutalmente

→ il sostegno è il "disegno della curva"

→ la curva è il modo in cui viene percorso.

Esempio 1 La semicirconferenza in figura è il sostegno di varie curve diverse, ad esempio



$\gamma(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$ $\quad t \in [-1,1]$ ← senso orario

$\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ $\quad t \in [0,\pi]$

$\gamma(t) = (-t, \sqrt{1-t^2})$ $\quad t \in [-1,1]$

} senso antiorario

Vettore e retta tangente

Supponiamo che le $x_i(t)$ siano derivabili in $[a,b]$.
Per ogni $t_0 \in [a,b]$ chiamiamo **vettore tangente** il vettore

$$\gamma'(t_0) = \dot\gamma(t_0) = (\dot x_1(t), \dot x_2(t), \dots, \dot x_n(t))$$

Chiamiamo retta tangente la retta di equ. parametrica

$$\gamma(t_0) + t\,\dot\gamma(t_0)$$

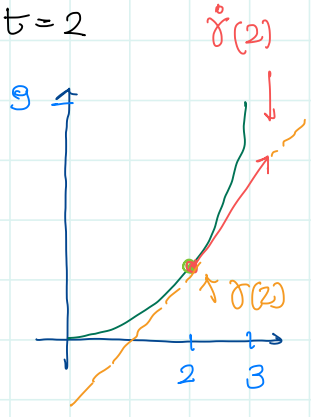
(t: parametro)

Questa è ben definita se $\dot\gamma(t_0)$ esiste ed è $\neq 0$ (vettore nullo)

Discorso fisico ma non solo: occhio alla differenza tra

→ VELOCITY, cioè $\dot\gamma(t_0)$ ← vettore
→ SPEED, cioè $\|\dot\gamma(t_0)\|$ ← numero

Esempio Consideriamo $\gamma(t) = (t, t^2)$ con $t \in [0,3]$.
Scrivere l'eq. cartesiana della retta tangente per $t=2$



Calcoliamo $\gamma(2) = (2,4)$

$\dot\gamma(t) = (1, 2t)$ $\qquad$ $\dot\gamma(2) = (1,4)$

(derivate delle componenti)

Retta tangente in parametrica

$$\gamma(2) + t\,\dot\gamma(2) = (2,4) + t(1,4) = (2+t, 4+4t)$$

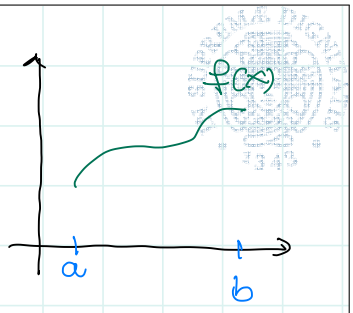
($2+t = x$, $4+4t = y$)

$$t = x-2, \qquad y = 4+4t = 4+4(x-2) = 4x-4$$

Curve cartesiane Sono curve del tipo

$$\gamma(t) = (t, f(t)) \quad \text{con } t \in [a,b]$$

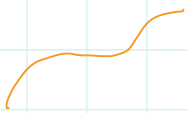
la prima componente è t

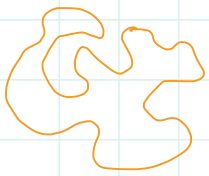


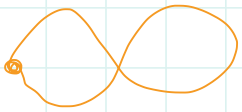
Il sostegno è il pezzo di grafico di $y = f(x)$ con $x \in [a,b]$.
Il sostegno viene percorso da sx verso dx.

Def. Una curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ si dice

- <u>chiusa</u> se $\gamma(a) = \gamma(b)$ (arriva dove era partita)
- <u>semplice</u> se è iniettiva, tranne al più agli estremi, cioè
  $\gamma(t) \neq \gamma(s)$ se $t \neq s$
  tranne al più eventualmente se t ed s sono gli estremi dell'intervallo
  (brutalmente: una curva è semplice se non torna su se stessa, tranne al più agli estremi)


semplice


semplice


no semplice

Come capisco se una curva è chiusa? Basta sostituire gli estremi ti

Come capisco se una curva è semplice? È complicato !!

Teoricamente devo impostare il sistema $\gamma(t) = \gamma(s)$ (in generale è un sistema di n equazioni) e dedurre che $t = s$, oppure t ed s sono gli estremi.

Ci sono almeno 3 scorciatoie:
→ trovare una componente strett. monotona
→ trovare un invariante monotono strett.
→ distinguere le zone
Ultima risorsa
→ risolvere il sistema

} Non funziona se γ è chiusa

Esempio 1 $\gamma(t) = (t^2, \sin t, t^3+1) \quad t \in [-4, 4]$
↑↑

È semplice perché la 3ª componente è crescente
(quindi la curva non può tornare su se stessa, in quanto la 3ª componente non torna indietro)

Esempio 2 $\gamma(t) = (\arctan t, t^2 - t^4) \quad t \in [-7, 7]$
↑↑
è monotona

Anche in questo caso $\gamma(t)$ è semplice (e non chiusa)

Esempio 3 $\gamma(t) = (\sin t, t^8) \quad t \in [1, 5]$

La curva è semplice perché t^8 è CRESCENTE in $[1, 5]$

Esempio 4 $\gamma(t) = (\cos t, t^8) \quad t \in [-1, 1]$

Questa curva NON è semplice.

Entrambe le componenti sono PARI, quindi ad esempio $\gamma(\frac{1}{2}) = \gamma(-\frac{1}{2})$ (Fatto generale: per negare la semplicità, basta trovare anche un solo punto di autointersezione)

Oss. Nell'esempio precedente
→ $\gamma(1) = \gamma(-1)$, ma non andavano bene per escludere la semplicità, essendo gli estremi
→ se fosse stato $t \in [-100, -37]$, allora $\gamma(t)$ sarebbe stata semplice (t^3 è decrescente nell'intervallo).

Esempio 5 $\gamma(t) = (t\cos t, t\sin t)$ con $t \in [10, 70]$

Prese singolarmente le componenti non sono monotone.
Tuttavia

$$x(t)^2 + y(t)^2 = t^2$$

↑ monotona nell'intervallo

Avere trovato una "combinazione" di $x(t)$ e $y(t)$ che risulta monotona, quindi iniettiva, rende tutta la curva iniettiva!

Se fosse $\gamma(s) = \gamma(t)$, cioè $x(s) = x(t)$ e $y(s) = y(t)$, allora sarebbe $s^2 = t^2$, dunque $s = t$!!!

Brutalmente: in questo caso è monotona la ρ.

—o—o—

ANALISI 2 — LEZIONE 38

Esempio 1 $\gamma(t) = (t^2 + \cos(t^3), \cos(t^3))$ $t \in [0, 15]$
Determinare se è semplice.

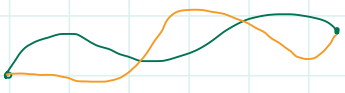
Nessuna delle componenti è monotona, ma ...
$x(t) - y(t) = t^2$
è monotona nell'intervallo $\Rightarrow$ γ è semplice !!

Esempio 2 $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ $t \in [0, 2\pi]$

1ª OSS La curva è chiusa, in quanto $\gamma(0) = \gamma(2\pi) = (1,0)$
$\Rightarrow$ di sicuro non funzionano componenti o invarianti monotoni

Distinguiamo delle zone
- Per $t \in [0, \pi]$ la curva ha $x(t)$ decrescente e $y(t) \geq 0$.
  Quindi ristretta a $[0, \pi]$ è semplice !!
- Per $t \in [\pi, 2\pi]$ la curva ha $x(t)$ crescente e $y(t) \leq 0$.
  Quindi ristretta a $[\pi, 2\pi]$ è semplice !!

Attenzione! NON HO ANCORA FINITO (semplice nel 1° pezzo e semplice nel 2° pezzo non basta per concludere semplice ovunque, perché un p.to del 1° pezzo potrebbe coincidere con un p.to del secondo)



← qui ci sono intersezioni tra andata e ritorno

- Tuttavia all'andata $y(t) \geq 0$ e al ritorno $y(t) \leq 0$, quindi possono incontrarsi solo quando $y = 0$, cioè $t = 0, \pi, 2\pi$.
  Sostituendo troviamo incrocio quando $t = 0$ e $s = 2\pi$, ma sono gli estremi e sono consentiti !

Esempio 2 bis $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ $t \in [0, 4\pi]$

È semplice?

Il sostegno è quello di prima, solo che viene percorso 2 volte!!

Formalmente, devo trovare $t \neq s$ (NON ENTRAMBI estremi) tali che $\gamma(t) = \gamma(s)$

$\gamma(0) = \gamma(2\pi) = (1,0)$ ← OK (il 2° NON è estremo)

$\gamma(0) = \gamma(4\pi) = (1,0)$ ← NO (agli estremi è consentito)

$\gamma(\frac{\pi}{2}) = \gamma(\frac{5\pi}{2}) = (0,1)$ ← OK

Esempio 3 $\gamma(t) = (t-t^2, t-t^3)$ con $t \in [0,1]$

Osserviamo che $\gamma(0) = \gamma(1) = (0,0)$ ⇒ curva chiusa

⇒ addio monotonia :(

Anche le cose non si vedono subito.

Impostiamo il sistema!

$$\begin{cases} t-t^2 = s-s^2 \\ t-t^3 = s-s^3 \end{cases} \qquad \begin{cases} t-s = t^2-s^2 \\ t-s = t^3-s^3 \end{cases} \qquad \begin{cases} t-s = (t-s)(t+s) \\ t-s = (t-s)(t^2+ts+s^2) \end{cases}$$

Se $t=s$ ci va bene. Quindi supponiamo $t \neq s$ e dividiamo allegramente:

$$\begin{cases} t+s = 1 \\ t^2+ts+s^2 = 1 \end{cases} \qquad t = 1-s$$

$$(1-s)^2 + (1-s)s + s^2 = 1$$

$$1+s^2-2s+s-s^2+s^2 = 1 \rightsquigarrow s^2-s = 0 \rightsquigarrow s(s-1) = 0$$

$s=0 \rightsquigarrow t=1$

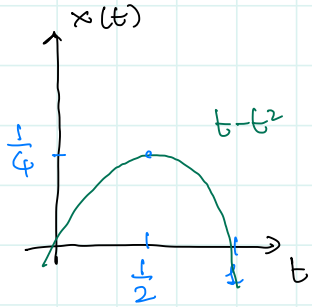
$s=1 \rightsquigarrow t=0$

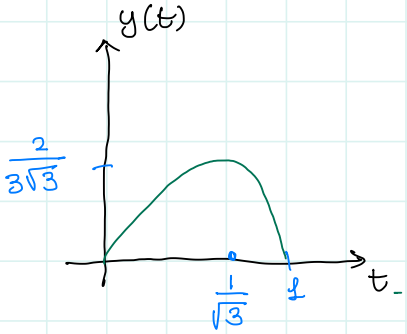
⇒ ci sono soluzioni con $t \neq s$, ma sono proprio gli estremi

⇒ la curva è semplice.

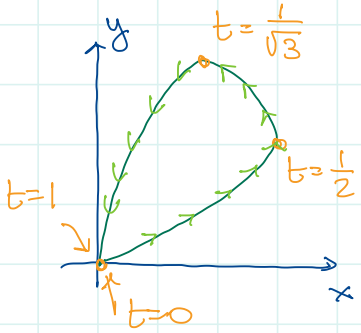
Facciamo il disegno del sostegno $\gamma(t) = (\underbrace{t-t^2}_{x(t)}, \underbrace{t-t^3}_{y(t)})$ $t \in [0,1]$

Disegno separatamente le componenti





$y'(t) = 1-3t^2$ si annulla per $t = \frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{2}$



- Per $t \in [0, \frac{1}{2}]$ crescono sia x sia y
- Per $t \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ si ha che x decresce e y cresce
- per $t \in [\frac{1}{\sqrt{3}}, 1]$ si ha che x e y decrescono

— o — o —

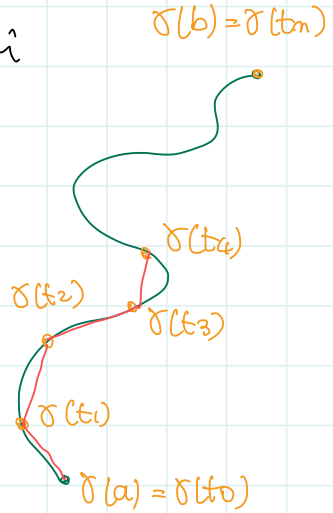
LUNGHEZZA DI UNA CURVA

Setting: sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva.

Una partizione di $[a,b]$ vuol dire scegliere punti

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m = b$$

(istanti intermedi)



Consideriamo la poligonale che passa per $\gamma(t_0), \gamma(t_1), \dots, \gamma(t_m)$. Questa avrà lunghezza

$$\sum_{k=1}^{n} \underbrace{\| \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) \|}_{\text{lunghezza } i\text{-esimo tratto}}$$

Brutalmente: fotografo la posizione dell'oggetto ai tempi
$t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$
poi unisco i puntini e calcolo la lungh. della spezzata (o poligonale).

Def. Si dice lunghezza della curva il sup delle lunghezze delle poligonali ottenute come sopra, al variare di tutte le possibili partizioni di $[a,b]$.

Oss. La lungh., essendo un sup, può venire un numero reale (≥ 0) oppure $+\infty$.

Oss. → Se due curve hanno lo stesso sostegno, hanno anche la stessa lunghezza?

No! Ad esempio la circ. percorsa 2 volte ha lungh. doppia rispetto a quella percorsa una volta.

→ Se due curve percorrono lo stesso sostegno una volta "in maniera continua", allora hanno la stessa lunghezza.

Come calcolo la lunghezza?

Teorema Se γ è di classe C^1 (le componenti sono derivabili con derivata continua), allora

$$\text{Lungh}(\gamma) = \int_a^b \|\dot\gamma(t)\|\,dt$$

($\|\dot\gamma(t)\|$: speed)

Oss. La formula di sopra è una versione raffinata di

$$\text{spazio} = \text{velocità} \cdot \text{tempo}$$

(velocità: speed)

In due variabili otteniamo

$$\text{lunghezza}(\sigma) = \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\, dt$$

In tre variabili otteniamo

$$\text{lunghezza}(\sigma) = \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}\, dt$$

Esempio Se $\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t)$ con $t \in [0, 2\pi]$ allora

$$\dot{\gamma}(t) = (-r\sin t, r\cos t)$$

e quindi

$$\text{lunghezza}(\sigma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(\sin^2 t + \cos^2 t)}\, dt = 2\pi r \quad \text{☺}$$

— o — o —

ANALISI 2 — LEZIONE 38

INTEGRALI CURVILINEI DI FUNZIONI

Integrale di una funzione lungo una curva

① Come si indicano
② Significato geometrico
③ Idea della definizione
④ Come si calcolano

1 Notazione

$$\int_\gamma f(x)\,ds$$

- γ: curva
- x: vettore in $\mathbb{R}^n$
- ds: vuol dire che è un integrale curvilineo
- $\int$: sempre singolo

Si intende che

- $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ è una curva CONTINUA
- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è una funzione LIMITATA (se è continua, meglio!)
  - basta che f sia definita sul supporto di γ

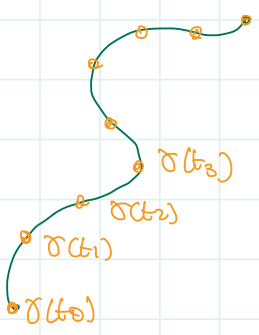
In 2 variabili $\displaystyle\int_\gamma f(x,y)\,ds$

In 3 variabili $\displaystyle\int_\gamma f(x,y,z)\,ds$

3 Idea della definizione Come da tradizione consideriamo una partizione di $[a,b]$:

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m = b$$

e consideriamo la spezzata che passa per $\gamma(t_0), \gamma(t_1), \dots, \gamma(t_m)$



Consideriamo le somme

$$\sum_{k=1}^{n} \| \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) \| \, m_i \qquad \sum_{k=1}^{n} \| \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) \| \, M_i$$

$\| \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) \|$: lunghezza tratto i-esimo spezzata

m_i: min di f nel tratto (o inf)

dove m_i e M_i sono $\inf$ e $\sup$ di f nel tratto compreso tra $\gamma(t_{i-1})$ e $\gamma(t_i)$

Man mano che la partizione diventa più fitta, le somme tendono all'integrale.

4 **Formula per il calcolo** Se f è continua e γ è di classe C^1, allora

$$\int_\gamma f(x)\,ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \, \| \dot\gamma(t) \| \, dt$$

↑ è l'integrale in $[a,b]$ di una funzione della sola t

In 2 variabili:

$$\int_\gamma f(x,y)\,ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{\dot x(t)^2 + \dot y(t)^2} \, dt$$

Esempio $\gamma(t) = (t, t^2)$ con $t \in [0,2]$

$f(x,y) = x$

$$\int_\gamma x\,ds = \int_0^2 t \sqrt{1 + (2t)^2}\, dt = \int_0^2 t \sqrt{1+4t^2}\, dt$$

t: $x(t)$ — $\sqrt{1+(2t)^2}$: speed

= si fa :)

2 Significato geometrico L'integrale curvilineo è l'integrale della funzione $\varphi(s)$ che rappresenta l'altezza a cui si trova l'omino dopo aver percorso un tratto di lunghezza s.
[Vedi video con GPS]

Caso speciale Se $f(x,y) \equiv 1$ costante, allora

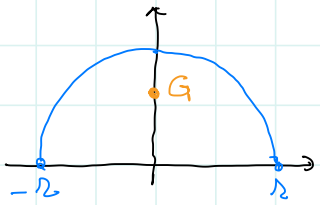
$$\int_\gamma f(x,y)\,ds = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt = \text{lungh(curva)}$$

Oss. Se l'omino percorre 2 volte la stessa curva, anche andata e ritorno, l'integrale curvilineo RADDOPPIA

BARICENTRO DI UNA CURVA Data una curva $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ definiamo baricentro il p.to $G=(x_G,y_G)$ con

$$x_G = \frac{1}{\text{lungh}(\gamma)}\int_\gamma x\,ds \qquad y_G = \frac{1}{\text{lungh}(\gamma)}\int_\gamma y\,ds$$

Esempio (Baricentro della semicirconferenza)



Parametrizziamo come

$\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t) \qquad t\in[0,\pi]$

Allora $\text{lungh}(\gamma) = \pi r$. Ovviamente $x_G = 0$ per simmetria

$$\int_\gamma y\,ds = \int_0^\pi \underbrace{r\sin t}_{y(t)}\sqrt{\underbrace{r^2\sin^2 t}_{\dot{x}(t)^2}+\underbrace{r^2\cos^2 t}_{\dot{y}(t)^2}}\,dt = r^2\int_0^\pi \sin t\,dt = 2r^2$$

Quindi $y_G = \dfrac{2r^2}{\pi r} = \dfrac{2}{\pi}r$ → sopra la metà !!

Se ero in vena di fare conti, potevo parametrizzare come

$$\gamma(t) = \left(t, \sqrt{r^2-t^2}\right) \quad \text{con } t \in [-r, r]$$

Così $\dot{x}(t) = 1$, $\dot{y}(t) = \dfrac{-2t}{2\sqrt{r^2-t^2}}$

$$\Rightarrow \|\dot{\gamma}(t)\| = \left\{1 + \frac{t^2}{r^2-t^2}\right\}^{1/2} = \left\{\frac{r^2}{r^2-t^2}\right\}^{1/2} = r\,\frac{1}{\sqrt{r^2-t^2}}$$

$$\int_\gamma y\,ds = \int_{-r}^{r} y(t)\,\|\dot{\gamma}(t)\|\,dt = \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-t^2}\,\frac{r}{\sqrt{r^2-t^2}}\,dt = 2r^2$$

Potevo usare la stessa parametrizzazione anche per il calcolo della lunghezza !!

— o — o —

Casi speciali di lunghezza

Curve cartesiane $\gamma(t) = (t, \varphi(t))$

(t = $x(t)$, $\varphi(t)$ = $y(t)$)

$$\text{lunga}(\sigma) = \int_a^b \sqrt{1+\dot{\varphi}(t)^2}\,dt$$

Curve date in coordinate polari, cioè descritte fornendo $\rho(t)$ e $\vartheta(t)$ per $t \in [a,b]$

Si intende che $x(t) = \rho(t)\cos\vartheta(t)$

$y(t) = \rho(t)\sin\vartheta(t)$

$$\dot{x}(t) = \dot{\rho}(t)\cos\vartheta(t) - \rho(t)\dot{\vartheta}(t)\sin\vartheta(t)$$
$$\dot{y}(t) = \dot{\rho}(t)\sin\vartheta(t) + \rho(t)\dot{\vartheta}(t)\cos\vartheta(t)$$

$$\|\dot{\gamma}(t)\| = \{\dot{\rho}^2\cos^2\vartheta + \rho^2\dot{\vartheta}^2\sin^2\vartheta - 2\rho\dot{\rho}\dot{\vartheta}\cos\vartheta\sin\vartheta + \dot{\rho}^2\sin^2\vartheta + \rho^2\dot{\vartheta}^2\cos^2\vartheta + 2\rho\dot{\rho}\dot{\vartheta}\cos\vartheta\sin\vartheta\}^{1/2}$$

Quindi

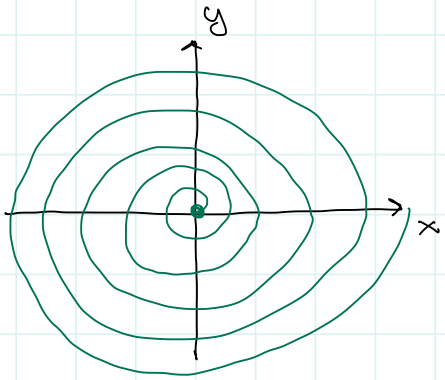
$$\|\dot\sigma(t)\| = \sqrt{\dot\rho(t)^2 + \rho(t)^2\,\dot\theta(t)^2}$$

da cui

$$\text{lunga}(\sigma) = \int_a^b \sqrt{\dot\rho(t)^2 + \rho(t)^2\,\dot\theta(t)^2}\,dt$$

Esempio $\rho(t) = t$ $\theta(t) = t$ con $t \in [0, 10\pi]$

è questa di cui abbiamo fatto la semplicità con l'invariante



$$\text{lunga}(\sigma) = \int_0^{10\pi} \sqrt{1+t^2}\,dt = \text{con un po' di fatica si fa :)}$$

— o — o —

ANALISI 2 – LEZIONE 40

FORME DIFFERENZIALI

In 2 variabili una forma differenziale si presenta nella forma

$$\omega = A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy$$

↑ omega piccolo

dove $A(x,y)$ e $B(x,y)$ sono due funzioni date, che si chiamano COEFFICIENTI della forma.

In 3 variabili è analogo, solo con 3 coeff.

$$\omega = A(x,y,z)\,dx + B(x,y,z)\,dy + C(x,y,z)\,dz$$

In n variabili più in generale

$$\omega = \sum_{k=1}^{n} A_k(x)\,dx_k$$

↑ vettore

Esempi

$$\omega = (x^2+y^2)\,dx + yx\,dy$$

$$\omega = x\,dx + y\,dy$$

$$\omega = dy$$

↑ in questo caso $A(x,y) \equiv 0$, $B(x,y) \equiv 1$

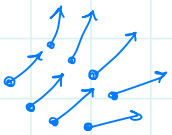
$$\omega = z\,dx + y\,dz + x\,dy$$

$$\omega = x^2\,dx + (x+y)\,dy + (z^2+\cos x)\,dz$$

Brutalmente: ω è una maniera buffa di scrivere i 2/3 coefficienti

CAMPI DI VETTORI Data $\omega = A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy$ possiamo pensare che in ogni p.to (x,y) del piano sia applicato un vettore

$$\vec{E}(x,y) = (A(x,y), B(x,y))$$



In questo modo si ottiene quello che si chiama campo di vettori

Possiamo pensare IN PRIMA APPROSSIMAZIONE che una forma diff. e un campo di vettori siano la stessa cosa. Matematicamente NON È COSÌ, ma comunque rende l'idea e salva l'intuizione.

INTEGRALE DI UNA FORMA DIFF. LUNGO UNA CURVA

1 Notazione

$$\int_\gamma \omega$$

γ: curva a valori in $\mathbb{R}^n$; ω: forma in $\mathbb{R}^n$, con i coeff. definiti almeno sul sostegno della curva

3 Definizione e calcolo Supponiamo $n=2$

$\omega = A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy$

$\gamma(t) = (x(t), y(t))$ con $t \in [a,b]$

Supponiamo che $x(t)$ e $y(t)$ siano di classe C^1, o almeno derivabili. Allora si pone

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \{A(x(t),y(t))\,\dot{x}(t) + B(x(t),y(t))\,\dot{y}(t)\}\,dt$$

Brutalmente: $dx = \dot{x}(t)\,dt$ e $dy = \dot{y}(t)\,dt$

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \left\{\sum_{k=1}^n A_k(\gamma(t))\,\dot{x}_k(t)\right\} dt$$

Esempio 1 $\omega = (x+y)\,dx - x^2\,dy$ $\qquad \gamma(t) = (t^2, t^3)$ $\qquad t \in [0,1]$

Allora

$$\int_\gamma \omega = \int_0^1 \{(t^2+t^3)\,2t - t^4 \cdot 3t^2\}\,dt = \text{si fa}$$

($2t$: $\dot{x}(t)$)

$$\int_\gamma x\,dy = \int_0^1 t^2 \cdot 3t^2\,dt = \text{si fa}$$

(t^2: $x(t)$; $3t^2$: $\dot{y}(t)$)

$$\boxed{\int_\gamma x\,ds} = \int_0^1 t^2 \sqrt{4t^2 + 9t^4}\,dt$$

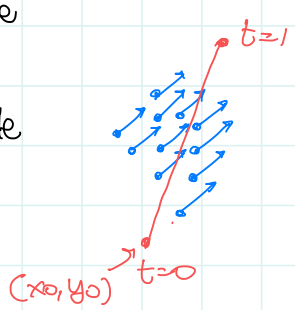
$\int_\gamma x\,ds$: integrale curvilineo della FUNZIONE x

(t^2: $x(t)$; $\sqrt{4t^2+9t^4}$: speed $= \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}$)

2 **Significato fisico** Sia E il campo di vettori associato alla forma $\omega = A\,dx + B\,dy$

Supponiamo di essere nel "caso banale", cioè
→ E costante (quindi A e B costanti)
→ $\gamma(t)$ percorre un segmento a velocità costante

$$x(t) = x_0 + t v_1$$
$$y(t) = y_0 + t v_2 \qquad t \in [0,1]$$



Allora facendo il conto troviamo

$$\int_\gamma \omega = \int_0^1 (A \cdot v_1 + B \cdot v_2)\,dt = A v_1 + B v_2 = \langle (A,B), (v_1, v_2) \rangle$$

((A,B): forza; (v_1,v_2): spostamento)

= lavoro compiuto dalla forza $\vec{E}$ sul punto materiale che si sposta lungo la curva.

Se la curva NON è un segmento e il campo non è costante, possiamo come al solito prendere una partizione di $[a,b]$

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

poi approssimare

→ la curva con la spezzata per $\gamma(t_0), \gamma(t_1), \dots, \gamma(t_n)$

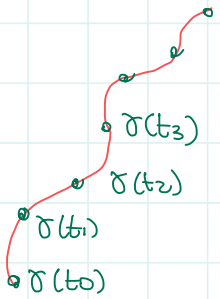
→ il campo con una costante in ogni tratto

poi fare la somma

$$\sum_{k=1}^{n} \langle \vec{E}(\gamma(t_k)), \gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1}) \rangle$$

$\vec{E}(\gamma(t_k))$: campo nel 1° estremo del k esimo tratto

$\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})$: spostamento (vettore!) nel k-esimo tratto



$$= \sum_{k=1}^{n} A(x(t_k), y(t_k)) \cdot (x(t_k) - x(t_{k-1})) + B(\dots) \cdot (y(t_k) - y(t_{k-1}))$$

$x(t_k) - x(t_{k-1}) = (t_k - t_{k-1})\, \dot{x}(s_k)$ $\qquad$ $y(t_k) - y(t_{k-1}) = (t_k - t_{k-1})\, \dot{y}(\sigma_k)$

$$= \sum_{k=1}^{n} \{ A(x(t_k), y(t_k))\, \dot{x}(s_k) + B(\dots)\, \dot{y}(\sigma_k) \} (t_k - t_{k-1})$$

Quando la partizione diventa sempre più fine, la somma tende all'integrale della definizione.

Oss. Ho applicato il teo. Lagrange di Analisi 1:

$$\varphi(b) - \varphi(a) = (b-a)\, \varphi'(c)$$

c: p.to unist. intermedio tra a e b.

INTEGRALI DI FORME VS INTEGRALI DI FUNZIONI

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \{A(x(t),y(t))\,\dot{x}(t) + B(x(t),y(t))\,\dot{y}(t)\}\,dt$$

$$= \int_a^b \left\{ A(x(t),y(t)) \frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2}} + B(\dots)\frac{\dot{y}(t)}{\sqrt{\dots}} \right\} \sqrt{\dots}\,dt$$

Se ora consideriamo il vettore

$$\vec{T}(t) = \left(\frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2}}, \frac{\dot{y}(t)}{\sqrt{\dots}} \right)$$

← VERSORE TANGENTE ALLA CURVA

allora

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \langle \vec{E}(\sigma(t)), \vec{T}(t) \rangle\, ds$$

prod. scalare tra campo e versore tangente

integrale di funzione

<u>Oss.</u> Per l'integrale curvilineo di funzioni

→ se cambio il verso di percorrenza del sostegno, l'integrale resta lo stesso

→ se percorro il sostegno avanti - indietro, l'integrale raddoppia

Per l'integrale curvilineo di forme diff.

→ se cambio il verso di percorrenza del sostegno, l'integrale CAMBIA DI SEGNO

→ se percorro il sostegno avanti indietro, i due contributi si cancellano

MORALE: l'integrale di forme ammette cancellazioni!

ANALISI 2 — LEZIONE 41

FORME DIFFERENZIALI ESATTE E CHIUSE

Def. Una forma diff. $\omega = A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy$ si dice **ESATTA** se esiste una funzione $V(x,y)$ tale che

$$A(x,y) = V_x(x,y) \qquad B(x,y) = V_y(x,y)$$

In altre parole $\vec{E}(x,y) = \nabla V(x,y)$

La funzione V si dice PRIMITIVA o POTENZIALE.

In 3 variabili richiediamo $A = V_x$, $B = V_y$, $C = V_z$

Def. (2 variabili) $\omega = A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy$ si dice **CHIUSA** se (le derivate in croce sono uguali)

$$A_y(x,y) = B_x(x,y)$$

(3 variabili) Stessa cosa, ma ora le derivate in croce sono 3, cioè

$$\omega = A\,dx + B\,dy + C\,dz$$

$$A_y = B_x \qquad A_z = C_x \qquad B_z = C_y$$

Oss. Per essere chiusa una forma deve essere con i coeff. che ammettono le deriv. parziali coincidenti.

RAPPORTI CHIUSURA – ESATTEZZA

① Esatta $\Rightarrow$ chiusa (purché i coeff. di ω siano differenziabili)

② Chiusa $\Rightarrow$ esatta SOLO IN CASI SPECIALI

Dim ① Supponiamo ω esatta, cioè $A = F_x$ e $B = F_y$.

Allora

$$\left.\begin{aligned} A_y &= (F_x)_y = F_{xy} \\ B_x &= (F_y)_x = F_{yx} \end{aligned}\right\}$$ sono uguali perché derivate parziali miste

In 3 variabili è uguale: $A = F_x$, $B = F_y$, $C = F_z$

$A_y = B_x$ $\quad (F_x)_y = (F_y)_x$ $\quad$ ☺

$A_z = C_x$ $\quad (F_x)_z = (F_z)_x$ $\quad$ ☺

$B_z = C_y$ $\quad (F_y)_z = (F_z)_y$ $\quad$ ☺

Oss. In particolare **ω NON CHIUSA $\Rightarrow$ ω NON ESATTA**

(se fosse esatta, allora sarebbe chiusa!)

Quindi se fallisce la chiusura, allora addio primitiva

Se non fallisce la chiusura, occorre vedere se siamo nei casi speciali di cui al p.to 2 di prima

— o —

CONSEGUENZA FONDAMENTALE DELL'ESATTEZZA

Proposizione Se ω è esatta e V è una sua primitiva, allora per ogni curva vale

$$\int_\gamma \omega = V(\gamma(b)) - V(\gamma(a))$$

→ i fisici direbbero "il campo è conservativo"

Morale: per calcolare l'integrale lungo una curva, basta fare la differenza tra i valori di una primitiva agli estremi, tenendo presente da dove passa la curva

Dim (in 2 variabili, ma si generalizza facilmente)

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \{ A(x(t),y(t))\,\dot{x}(t) + B(x(t),y(t))\,\dot{y}(t)\}\,dt$$

$$= \int_a^b \underbrace{\{ V_x(x(t),y(t))\,\dot{x}(t) + V_y(x(t),y(t))\,\dot{y}(t)\}}_{\frac{d}{dt} V(x(t),y(t)) \text{ per la CHAIN RULE}}\,dt$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt} V(x(t),y(t))\,dt$$

$$= V(x(b),y(b)) - V(x(a),y(a))$$

integrale di una derivata

$$= V(\gamma(b)) - V(\gamma(a))$$

— o — o —→

Esempio 1 $\omega = x\,dx + y\,dy$

$$\gamma(t) = (\sin t \cdot \arctan(t^3),\ \sin^3(t)) \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Calcolare $\int_\gamma \omega$.

1° modo Uso la definizione

$$\int_0^{2\pi} \{(\sin t \cdot \arctan(t^3)) \cdot [\sin t \cdot \arctan(t^3)]' + \sin^3 t \cdot (\sin^3 t)'\}\,dt$$

= auguri !! ☺

2° modo Osservo che la forma è esatta e una primitiva è

$V(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$ (Fare la verifica!)

Osservo che $\gamma(0) = (0,0) = \gamma(2\pi)$. Quindi

$\int_\gamma \omega = V(0,0) - V(0,0) = 0$ (non serviva neanche calcolare la primitiva)

Caratterizzazioni dell'esattezza

Teorema Sia ω una forma differenziale.
Allora i seguenti fatti sono equivalenti:
(i) ω è esatta (cioè ammette una primitiva)
(ii) per ogni curva γ chiusa si ha che $\int_\gamma \omega = 0$

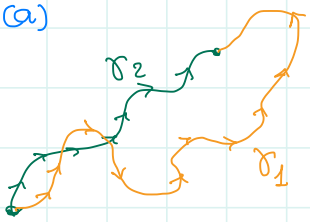
(iii) per ogni coppia di curve γ_1 e γ_2, se hanno gli stessi estremi cioè $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$ e $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$, allora

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

Dim (i) $\Rightarrow$ (ii) Questo segue dalla Prop. precedente in quanto

$$\int_\gamma \omega = V(\gamma(b)) - V(\gamma(a)) = 0$$

(uso hp (i); ovvio se $\gamma(b) = \gamma(a)$)



(ii) $\Rightarrow$ (iii) Siano γ_1 e γ_2 due curve con gli stessi estremi
Costruisco la curva γ_3 ottenuta percorrendo prima γ_1 e poi γ_2 al contrario. Quindi γ_3 è chiusa, ma allora

$$0 = \int_{\gamma_3} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2 \text{ al contrario}} \omega = \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega$$

(hp (ii); facendo al contrario, il segno cambia)

Quindi $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Devo definire la primitiva.

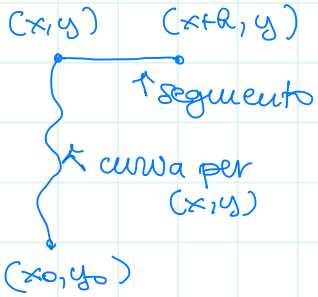
Scelgo (x_0,y_0) e per ogni (x,y) definisco

$$V(x,y) = \int_\gamma \omega$$

γ: curva qualunque che unisce (x_0,y_0) e (x,y) (per hp (iii) il valore NON dipende dalla curva)

Devo dimostrare che $V_x = A$ e $V_y = B$. Uso la definizione di derivata parziale

$$\frac{1}{R}\left[V(x+R,y) - V(x,y)\right] =$$



Per calcolare $V(x+R,y)$ uso la curva che usavo per (x,y) e poi proseguo lungo il segmento

segmento $= (x+t,y)$ con $t \in [0,R]$

$$= \frac{1}{R}\int_{\text{segmento}} \omega$$

$$= \frac{1}{R}\int_0^R A(x+t,y)\,\underbrace{1}_{\uparrow x'} + B(x+t,y)\cdot\underbrace{0}_{\uparrow y'}\,dt$$

$$= \frac{1}{R}\int_0^R A(x+t,y)\,dt = \frac{1}{R}\cdot R\cdot A(x+c,y)$$

(teorema media integrale; c: punto misterioso tra 0 e R)

Ora basta osservare che, quando $R \to 0$, anche $c \to 0$ e quindi $A(x+c,y)$ tende ad $A(x,y)$.

Stesso discorso per la 2ª componente.

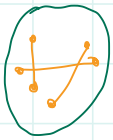
— o — o —

ANALISI 2 – LEZIONE 42

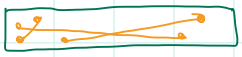
Sotto quali ipotesi CHIUSA ⇒ ESATTA

Sia Ω un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ (o in generale $\mathbb{R}^n$).

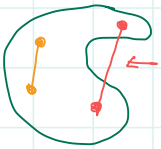
Si dice che Ω è **CONVESSO** se, per ogni coppia punti P e Q di Ω, tutto il segmento PQ è contenuto in Ω



SI CONVESSO



SI CONVESSO

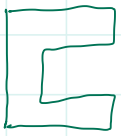


NO CONVESSO

Si dice che Ω è **STELLATO** se esiste $P \in \Omega$ tale che, per ogni Q in Ω, tutto il segmento PQ è contenuto in Ω

(Ora P è fisso e varia solo Q. Brutalmente: un guardiano posto in P sorveglia tutto Ω)

SI STELLATO



NO STELLATO

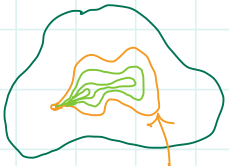
Si dice che Ω è **CONNESSO** se è fatto da un pezzo solo

SI CONNESSO

SI CONNESSO

INSIEME NO CONNESSO

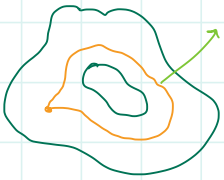
Si dice che Ω è **SEMPLICEMENTE CONNESSO** se ogni curva chiusa a valori in Ω può essere deformata fino ad ottenere una curva che resta costante in un punto.



curva chiusa data

(posso tirare il cordino fino a farlo "sparire" in un punto)

SI SEMPL. CONNESSO



se non posso tagliare, resta incastrato dal buco

NO SEMPL. CONNESSO

Brutalmente: semplicemente connesso vuol dire "senza buchi".

Oss. In 3 dimensioni

→ $\mathbb{R}^3$ meno una sferetta è sempl. connesso? SI

→ $\mathbb{R}^3$ meno una retta è sempl. connesso? NO (una corda che gira attorno alla retta non si sfila)

Oss. Valgono le implicazioni

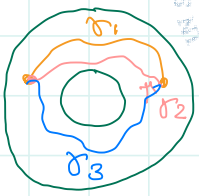
CONVESSO ⇒ STELLATO ⇒ SEMP. CONN. ⇒ CONNESSO

Teorema misterioso 1 Se ω è chiusa e l'insieme su cui è definita è sempl. connesso, allora ω è esatta.

Teorema misterioso 2 Se ω è chiusa, e γ_1 e γ_2 sono due curve OMOTOPE (cioè si possono trasformare l'una nell'altra lasciando fissi gli estremi e restando nella zona di def. di Ω), allora

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

<u>Commento sull'ipotesi</u> Supponiamo che l'insieme di definizione di ω sia una corona circolare. Consideriamo $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ come in figura.



Allora

→ γ_1 e γ_2 sono omotope

→ γ_1 e γ_3 non sono omotope, e nemmeno γ_2 e γ_3

TRE STRATEGIE PER CALCOLARE L'INTEGRALE DI UNA FORMA DIFF. SU UNA CURVA (con giorno ce ne sarà una quarta)

Devo calcolare $\int_\gamma \omega$. Come posso fare?

1° modo Uso banalmente la definizione

2° modo Spero che la forma sia esatta (magari dimostro l'esattezza usando il teo. mist. 1), poi calcolo una primitiva e faccio la differenza tra i valori agli estremi

3° modo Spero che la forma sia chiusa, e poi sostituisco la curva data con una nuova curva (magari più semplice) che sia omotopa a quella data, e poi calcolo l'integrale su questa nuova curva (per il teo. mist. 2 coincide con quello richiesto).

<u>Esempio 1</u> $\omega = y\,dx + z\,dy + x\,dz$ in $\mathbb{R}^3$. È esatta?

$A_y = B_x$ $\quad 1 = 0$ $\quad$ NO! $\quad \therefore \Rightarrow$ NO chiusa

$A_z = C_x$ $\quad \Rightarrow$ NO esatta

$B_z = C_y$

Esempio 2 $\omega = x\,dx + y\,dy + z\,dz$ in $\mathbb{R}^3$. È esatta?

Controlliamo la chiusura. Le 3 verifiche danno tutte $0=0$, quindi ω è chiusa ☺. Questa è definita su $\mathbb{R}^3$ che è addirittura convesso, quindi pure sempl. connesso.
Quindi è pure esatta ☺.
Una primitiva si vede a occhio

$$V = \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)$$

Esempio 3 $\omega = y^2\,dx + 2xy\,dy$ È esatta?

Controlliamo la chiusura: $A_y \overset{?}{=} B_x$ ⇝ $2y = 2y$ ☺

È chiusa, ed essendo definita su $\mathbb{R}^2$ è pure esatta.
Una primitiva è

$$V(x,y) = xy^2 \quad \text{(sempre la verifica!)}$$

Esempio 4 $\omega = y^2\,dx + (2xy + e^{-y^2})\,dy$
$\gamma(t) = (t^2,\ t^2-t) \qquad t \in [0,1]$

Calcolare $\int_\gamma \omega$.

1° modo Uso la def.

$$\int_\gamma \omega = \int_0^1 \{(t^2-t)^2 \cdot 2t + (2t^2(t^2-t) + e^{-(t^2-t)^2}) \cdot (2t-1)\}\,dt$$

(y^2 ↑ $\dot{x}$; $2x\,y$; $+e^{-y^2}$; $\dot{y}$)

= rinuncio ☹

2° modo Spero sia esatta.

Controllo la chiusura: $A_y \overset{?}{=} B_x$ ovvero $2y = 2y$ ☺

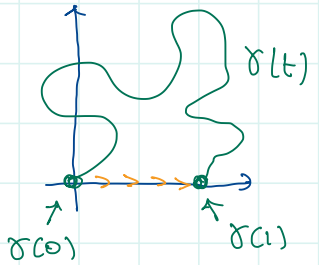
Essendo definita su $\mathbb{R}^2$ è pure esatta. Una primitiva è

$$V(x,y) = xy^2 + ??$$

↑ deve avere come derivata e^{-y^2} e non lo so trovare 😕

3° modo Essendo la forma chiusa, posso usare una curva omotopa a γ con gli stessi estremi

Basta usare il seguente congiungente !!



$\gamma_1(t) = (t,0)$ con $t \in [0,1]$

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_0^1 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0$$

(y^2, $\dot{x}$, $2xy + e^{-y^2}$, $\dot{y}$) ☺

ANALISI 2 – LEZIONE 43

LA SOLITA Consideriamo la forma diff.

$$\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

Questa è definita in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

La forma è CHIUSA. Infatti

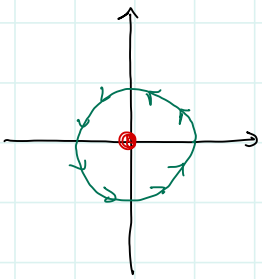
$$A_y = -\frac{x^2+y^2-2y\cdot y}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$B_x = \frac{x^2+y^2-2x\cdot x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

☺

Sarà esatta? Essendo $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ NON sempl. connesso (infatti c'è un buco), dal teorema generale non si può dire nulla.

La forma NON è esatta. Come si dimostra che una forma non è esatta?
Ci sono almeno due modi
→ si fa vedere che non è chiusa (ma qui non funziona)
→ si trova una curva $\gamma(t)$ chiusa sulla quale l'integrale di ω è $\neq 0$ (se una forma è esatta, l'integrale su ogni curva chiusa si annulla).



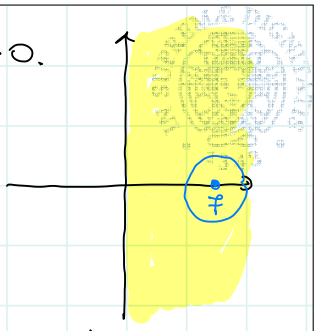
Prendiamo $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ con $t \in [0, 2\pi]$

$$\int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} \left\{ -\frac{\sin t}{1}\cdot(-\sin t) + \frac{\cos t}{1}\cos t \right\} dt$$

($-\frac{\sin t}{1} = -\frac{y}{x^2+y^2}$, $\dot{x}(t) = -\sin t$, $\frac{\cos t}{1} = \frac{x}{x^2+y^2}$, $\dot{y}(t) = \cos t$)

$$= \int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi \neq 0$$

Oss. 1 Se considero ω come definita solo per $x>0$.
Ora la zona di def. è addirittura convessa, e in particolare sempl. connessa.
Quindi essendo ω chiusa, ω sarà per forza esatta in questa zona !!!
In particolare esiste V definita per $x>0$ a valori reali t.c.



$$V_x = A \quad \text{e} \quad V_y = B$$

Ad esempio $V(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ ↑ non crea problemi avendo preso $x>0$

$$V_x = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{x^2}{x^2+y^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

e analogamente per V_y.

In particolare, se integro lungo la curva $\gamma(t) = (1+\cos t, \sin t)$ ↑ circ. con centro in $(1,0)$ e raggio 1
con $t \in [0, 2\pi]$, so già che l'integrale viene nullo !!

Lo stesso discorso vale nel semipiano $x<0$, con la stessa primitiva!

Il discorso vale anche nei semipiani $y>0$ e $y<0$.
Questa volta una possibile primitiva è

$$V(x,y) = -\arctan\frac{x}{y}$$

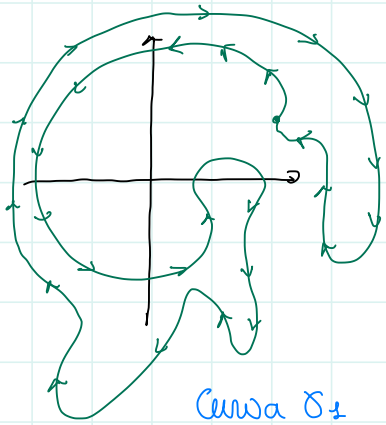
Infatti

$$V_x(x,y) = \frac{-1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} = -\frac{y^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{y} = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

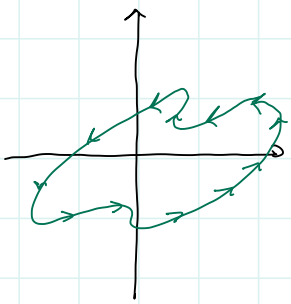
e idem per V_y ↑

Oss. 2 L'esempio precedente mostra che una forma può
→ essere esatta in un certo insieme A
→ " " " " " " B
→ NON essere esatta in $A \cup B$
(L'esattezza, al contrario della chiusura, è una proprietà GLOBALE).

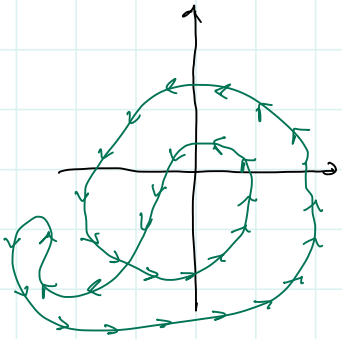
Oss. 3 Calcolare l'integrale di ω sulle curve indicate in figura



Curva γ_1



Curva γ_2



Curva γ_3

$$\int_{\gamma_1} \omega = 0 \qquad \int_{\gamma_2} \omega = 2\pi \qquad \int_{\gamma_3} \omega = 4\pi$$

Questo perché l'unica cosa che conta è "quante volte la curva gira intorno al buco",

Essendo la forma, l'integrale su due curve coincide se due curve possono essere trasformate l'una nell'altra in maniera continua "senza strappi" e restando nella zona di definizione.
→ La curva γ_1 si può trasformare in una curva contenuta nel semipiano $x > 0$, o anche in una curva costante
→ La curva γ_2 si può trasformare in $(\cos t, \sin t)$ con $t \in [0, 2\pi]$, per cui abbiamo già fatto il conto.
→ La curva γ_3 si può trasformare in $(\cos t, \sin t)$ con $t \in [0, 4\pi]$, quindi l'integrale è il doppio del precedente.

Oss. 4 Ogni altra forma diff. che sia CHIUSA e NON ESATTA su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ è del tipo

$$\omega = \omega_1 + \lambda \omega_2$$

(ω_1: forma esatta; ω_2: la solita)

Morale: la solita è in un certo senso l'UNICO esempio.

Idea: data una qualunque ω che sia diversa una non esatta, scelgo λ in modo tale che

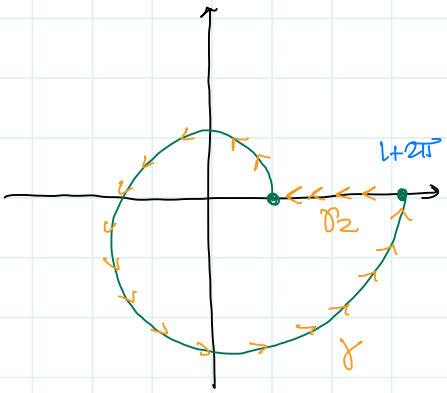
$$\int_\gamma \omega = \lambda 2\pi$$

(γ: solita circonferenza; integrale della solita lungo la solita circonferenza)

A questo punto osservo che, se pongo $\omega_1 = \omega - \lambda \omega_2$ (la solita) allora ω_1 ha integrale nullo lungo tutte le curve CHIUSE, anche quelle che girano intorno al buco, quindi ω_1 è esatta.

Oss. 5 Calcolare $\int_\gamma \omega$ dove $\gamma(t) = ((1+t)\cos t, (1+t)\sin t)$ con $t \in [0, 2\pi]$

Osserviamo che γ, intanto che gira, si allontana dall'origine.



1° modo Uso la definizione ...

2° modo Dopo aver percorso γ, torno in partenza lungo la direttissima.

Considero quindi $\gamma_1(t) = (1+t, 0)$ con $t \in [0, 2\pi]$ e definisco γ_2 come γ_1 percorsa al contrario.
Adesso

$$2\pi = \int_{\gamma \cup \gamma_2} \omega$$ perché $\gamma \cup \gamma_2$ è equivalente ad un giro singolo intorno al buco

$$= \int_{\gamma} \omega - \int_{\gamma_1} \omega$$ perché γ_2 è fare γ_1 al contrario.

Ma allora

$$\int_{\gamma} \omega = 2\pi + \int_{\gamma_1} \omega$$

$$= 2\pi + \int_0^{2\pi} \left\{ 0 \cdot \dot{x}(t) + \frac{x(t)}{x(t)^2 + y(t)^2} \cdot 0 \right\} dt$$

($0 \cdot \dot{x}(t)$: nullo per "colpa" di y al numeratore; 0: $\dot{y}(t)$)

$$= 2\pi$$

[Usare la definizione come esercizio].

— o — o —

ANALISI 2 – LEZIONE 44

Esempio 1 $\omega = \frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$

Verifica chiusura: $A_y = \frac{x^2+y^2-2y\cdot y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$

$B_x = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$

Sono diverse, quindi non è chiusa, quindi non è nemmeno esatta.

Esempio 2 $\omega = \frac{x}{x^2+y^2}dx + \frac{y}{x^2+y^2}dy$

$A_y = +\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$ $\quad B_x = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$ ☺

È chiusa, ma essendo definita in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ non è detto che sia esatta su tutto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Proviamo ad integrare lungo la solita circ. $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ con $0 \le t \le 2\pi$:

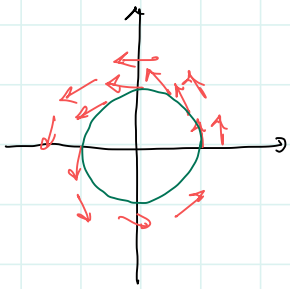
$$\int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\cos t}{1}(-\sin t) + \frac{\sin t}{1}\cdot\cos t \right\} dt = \int_0^{2\pi} 0\, dt = 0$$

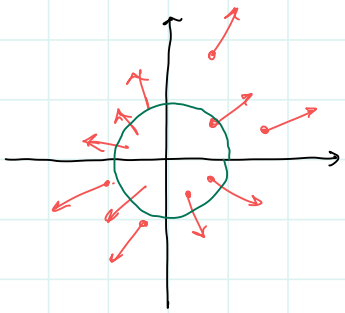
Ci sta che sia esatta! In effetti lo è

$$V(x,y) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) \quad \text{[Fare la verifica!!]}$$

Fatto generale misterioso Se l'insieme di definizione ha s buchi, la forma ω è chiusa, e l'integrale di ω lungo una curva di comodo che resta intorno a ciascuno degli s buchi viene 0, allora la forma è esatta su tutto l'insieme.
(Curvo s curve, una per buco)

La solita vs esempio 2 come campi di vettori





$$\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy \qquad \omega = \frac{x}{x^2+y^2}dx + \frac{y}{x^2+y^2}dy$$

In entrambi i casi il campo $\vec{E} = (A,B)$ è costituito da vettori di norma 1.

Nel secondo caso il campo è CENTRIFUGO (e in effetti in ogni punto $\vec{E}$ è vettore tangente alla solita circonferenza)

Nel primo caso il campo è il secondo ruotato di 90° in verso antiorario (Algebra Lineare!). (e in effetti in ogni punto $\vec{E}$ è parallelo al vettore tangente alla curva).

Interpretazione ciclistica Se faccio un giro in bici (curva chiusa) e ho sempre il vento contrario (o sempre favorevole) (cioè il prodotto scalare tra il tangente alla curva ed $\vec{E}$ ha un segno, positivo o negativo, fisso), allora la direzione del vento di sicuro non è il gradiente di un potenziale.

[Se fosse $\vec{E} = \nabla V$, allora l'integrale della forma lungo ogni curva chiusa farebbe 0, ma questo è l'integrale del prodotto scalare tra $\vec{E}$ ed il tangente].

Esempio 3 Dire per quali valori di α la forma

$$(x+3y)e^{xy}dx + (y^2+\alpha x)e^{xy}dy$$

è esatta (in questo caso su tutto $\mathbb{R}^2$)

Su tutto $\mathbb{R}^2$ l'aperto è sostanzialmente equiv. alla chiusura
Impongo la chiusura:

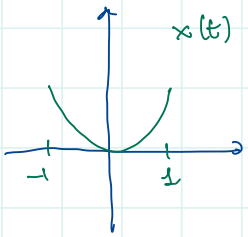
$$A_y = 3e^{xy} + 3yx\,e^{xy} \qquad B_x = \alpha e^{xy} + \alpha x y\, e^{xy}$$

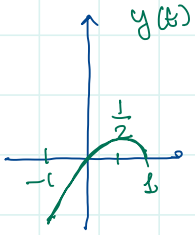
Quindi la forma è esatta $\iff \alpha = 3$.
Per $\alpha = 3$ una primitiva è

$$F(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + 3e^{xy} + \frac{1}{3}y^3 \quad [\text{Fare la verifica!!}]$$

Esempio 4 Consideriamo la curva $\gamma(t) = (t^2, t - t^2)$ con $t \in [-1, 1]$
Studiare la semplicità e fare un disegno.

Vediamo separatamente le due componenti:



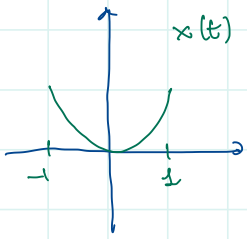


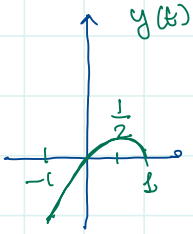
Brutta notizia: nessuna delle componenti è monotona, quindi la semplicità va fatta in altro modo.

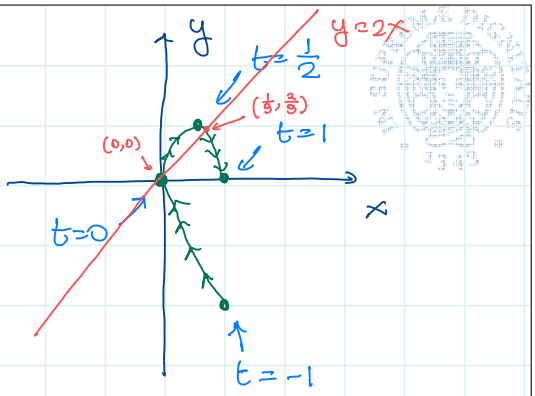
1° modo Osservo che $x(t) + y(t) = t$, che è iniettiva $\Rightarrow$ semplice

2° modo Risolvo il sistema $t^2 = s^2$
$t - t^2 = s - s^2$

Dalla prima otteniamo $t = s$ oppure $t = -s$. La prima ci sta bene.
La seconda porta a $-s - s^2 = s - s^2$, da cui $2s = 0$, cioè $s = 0$
e $t = -s = 0$, quindi in realtà ancora $t = s$.







Per $-1 \le t \le 0$ abbiamo che
x decresce e y cresce ↖

Per $0 \le t \le \frac{1}{2}$ abbiamo che
x cresce e y cresce ↗

Per $\frac{1}{2} \le t \le 1$ abbiamo che
x cresce e y decresce ↘

Altra domanda: calcolare l'intersezione/i tra la curva e la retta $y = 2x$.

Basta risolvere $y(t) = 2x(t)$, cioè $t - t^2 = 2t^2$, cioè $3t^2 = t$, cioè

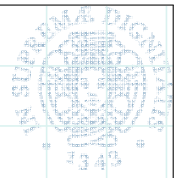
$t = 0 \rightsquigarrow (0,0)$ $\qquad$ $t = \frac{1}{3} \rightsquigarrow \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$

Se volessi le intersezioni con $y = x^2$ "basterebbe" risolvere

$$t - t^2 = (t^2)^2.$$

— o — o —

ANALISI 2 — LEZIONE 45



GRADIENTE, LAPLACIANO, DIVERGENZA, ROTORE

GRADIENTE

Funzione → Vettore

Il gradiente è il vettore che ha come componenti le derivate parziali di una funzione

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)$$

LAPLACIANO

Funzione → Funzione

Il Laplaciano è la somma delle derivate parziali seconde PURE

$$\Delta f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(x)$$

In due variabili $\Delta f = f_{xx} + f_{yy}$

In tre variabili $\Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$

Oss. Il Laplaciano è la TRACCIA della matrice Hessiana.

DIVERGENZA

Vettore → Funzione

Dato un campo $\vec{E} = (A, B)$ in due variabili, si pone
(↑ ↑ dipendono da x e y)

$$\operatorname{div} \vec{E} = A_x + B_y$$

In tre variabili, se $\vec{E} = (A, B, C)$, allora
(↑ ↑ ↑ dipendono da x, y, z)

$$\operatorname{div} \vec{E} = A_x + B_y + C_z$$

Si può anche generalizzare a n variabili. In questo caso $\vec{E}$ ha n componenti, che a loro volta dipendono da $x_1, \dots, x_n$ e

$$\operatorname{div} \vec{E} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial A_k}{\partial x_k}(x)$$

(A_k: k-esima componente di $\vec{E}$.)

ROTORE — Vettore → Vettore — (CURL in inglese)

Lo faremo "solo" in 3 variabili. Se $\vec{E} = (A, B, C)$, allora $\operatorname{rot} \vec{E}$ si ottiene sviluppando formalmente il determinante

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A & B & C \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = (C_y - B_z,\ A_z - C_x,\ B_x - A_y)$$

I fisici lo fanno anche in 2 variabili, pensando tacitamente che la terza variabile sia nulla, quindi

$\vec{E} = (A, B)$ (A, B dipendono solo da x e y) $\rightsquigarrow$ $\operatorname{rot} \vec{E} = (0, 0, B_x - A_y)$

Notazioni dei fisici

Gradiente: ∇ ← NABLA

Laplaciano: ∇^2

Divergenza: $\nabla \cdot \vec{E}$

Rotore: $\nabla \wedge \vec{E}$

Relazioni base

$$\operatorname{div}(\nabla f) = \Delta f$$

$$\operatorname{div}(f_x, f_y, f_z) = (f_x)_x + (f_y)_y + (f_z)_z = \Delta f$$

$$\operatorname{rot}(\nabla f) = 0$$ ↑ vettore nullo

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ f_x & f_y & f_z \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rot}(\nabla f) = (f_{zy} - f_{yz}, f_{xz} - f_{zx}, f_{yx} - f_{xy}) = (0,0,0)$$

per inversione dell'ordine di derivazione

La formula vale anche in 2 variabili con il rotore dei fisici è:

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{E}) = 0$$

$$\operatorname{rot}(\vec{E}) = (C_y - B_z, A_z - C_x, B_x - A_y)$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}(\vec{E})) = (C_y - B_z)_x + (A_z - C_x)_y + (B_x - A_y)_z$$
$$= \cancel{C_{yx}} - \cancel{B_{zx}} + \cancel{A_{zy}} - \cancel{C_{xy}} + \cancel{B_{xz}} - \cancel{A_{yz}}$$

Esercizio Calcolare la formula per $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{E})$.

Achtung! Molte delle formule che uno potrebbe scrivere NON hanno senso. Ad esempio

$\operatorname{rot}(\Delta f)$, $\operatorname{rot}(\operatorname{div}\vec{E})$ (rot vuole in input un vettore)

$\nabla(\operatorname{rot}\vec{E})$, $\Delta(\operatorname{rot}\vec{E})$ $\operatorname{div}(\Delta f)$

↑ voglio in input una funzione ↑ vuole in input un vettore!

GRADIENTE NULLO / UGUALE

→ Se $\nabla f = 0$ e l'insieme di definizione è CONNESSO, allora f è costante

→ Se $\nabla f_1 = \nabla f_2$ e sono definite su un connesso, allora $f_2 = f_1 + \text{costante}$

[Basta osservare che ∇ è lineare, quindi $\nabla(f_1 - f_2) = \nabla f_1 - \nabla f_2 = 0$]

ROTORE NULLO / UGUALE

$$\text{rot}\,\vec{E} = (C_y - B_z,\ A_z - C_x,\ B_x - A_y) = 0$$

$$\Leftrightarrow C_y = B_z,\quad A_z = C_x,\quad B_x = A_y$$

$\Leftrightarrow$ la forma $\omega = A\,dx + B\,dy + C\,dz$ è chiusa

→ Se $\text{Rot}\,\vec{E} = 0$ e l'insieme di definizione è SEMPL. CONNESSO allora $\vec{E} = \nabla f$ per una opportuna f.

→ Se $\text{rot}\,\vec{E}_1 = \text{rot}\,\vec{E}_2$ e sono su un sempl. connesso, allora $\vec{E}_2 = \vec{E}_1 + \nabla f$

[Basta osservare che il rotore è lineare]

Oss. La stessa cosa vale per il rotore dei fisici

DIVERGENZA NULLA / UGUALE

→ Se $\text{div}\,\vec{E} = 0$, e l'insieme di definizione verifica una certa proprietà (gratis ad esempio per insiemi stellati) allora $\vec{E} = \text{rot}\,\vec{F}$ per un opportuno vettore $\vec{F}$.

Dato $\vec{E}$, trovare $\vec{F}$, lo chiameremo problema di inversione del rotore.

→ Se $\operatorname{div}\vec{E}_1 = \operatorname{div}\vec{E}_2$, e l'insieme è fatto bene, allora

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_1 + \operatorname{rot}(\text{qualcosa}).$$

— o — o —

Oss. Per tutti questi operatori valgono formule "simili" a quelle per le derivate.

Esempio $\operatorname{div}(f\vec{E}) = f\operatorname{div}(\vec{E}) + \langle \nabla f, \vec{E} \rangle$

(f: funzione, $\vec{E}$: vettore)

$\vec{E} = (A, B, C)$

$\operatorname{div}(fA, fB, fC) = (fA)_x + (fB)_y + (fC)_z$

$= f_x A + f A_x + f_y B + f B_y + f_z C + f C_z$

$= f\operatorname{div}(\vec{E}) + \langle \nabla f, \vec{E} \rangle$

Esercizio Trovare formula analoga per $\operatorname{rot}(f\vec{E})$.

— o — o —

ANALISI 2 – LEZIONE 46

SUPERFICI Tre tipi di descrizione (siamo sempre in $\mathbb{R}^3$)

- → cartesiana
- → implicita
- → parametrica

} 3 modi di descrivere una superficie

CARTESIANA Data $f: \Omega \to \mathbb{R}$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, la sup. è il grafico di f

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \Omega,\ z = f(x,y)\}$$

IMPLICITA Data $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ possiamo considerare il suo luogo di zeri

implicita perché non ho ricavato nessuna variabile

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{f(x,y,z) = 0}_{\text{equazione della superficie}}\}$$

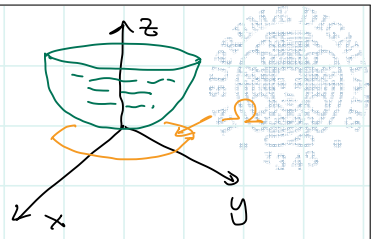
PARAMETRICA Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ e data $\Phi: \Omega \to \mathbb{R}^3$ consideriamo la superficie

S = immagine di Φ

Se $\Phi(u,v) = (X(u,v), Y(u,v), Z(u,v))$, allora

$$S = \{(X(u,v), Y(u,v), Z(u,v)) : (u,v) \in \Omega\}$$

Esempio 1



$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2+y^2 \le 1,\ z = x^2+y^2\}$$

S: cartesiana; $x^2+y^2 \le 1$: descrive la base $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$; $z = x^2+y^2$: $f(x,y)$

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z - x^2 - y^2 = 0,\ x^2+y^2 \le 1\}$$

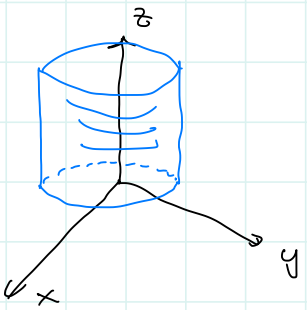
$z - x^2 - y^2 = 0$: equazione della sup. in forma implicita

In maniera parametrica potrei porre

$$\Phi(u,v) = \{(u, v, u^2+v^2) : (u,v) \in \Omega\}$$

u^2+v^2: 3ª coord = somma dei quadrati delle prime 2; Ω: solita base $u^2+v^2 \le 1$

Esempio 2 Cilindro con asse z, raggio base 2 e altezza $[0,5]$



Descrizione parametrica

$$(2\cos\theta, 2\sin\theta, z) \qquad 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le z \le 5$$

o equivalentemente

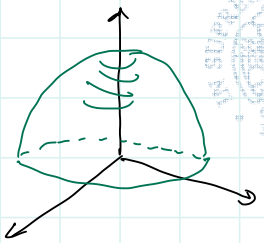
$$(2\cos u, 2\sin u, v) \qquad (u,v) \in [0,2\pi] \times [0,5]$$

Ω = rettangolo

Descrizione implicita:

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 4,\ 0 \le z \le 5\}$$

Esempio 3 (semisfera) Raggio = 3 centro nell'origine



$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 9,\ z \geq 0\}$ ← implicito

$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2+y^2 \leq 9}_{\text{base } \Omega},\ z = \underbrace{\sqrt{9-x^2-y^2}}_{f(x,y)}\}$ ← cartesiana

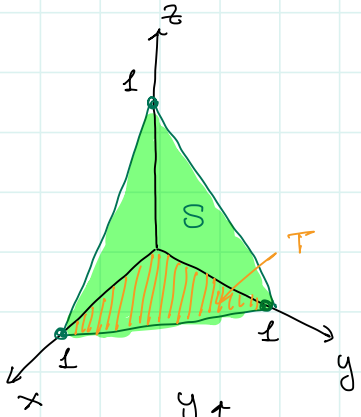
La descrizione parametrica la possiamo dare sfruttando la cartesiana

$(u, v, \sqrt{9-u^2-v^2}) : \boxed{u^2+v^2 \leq 9}$ descrizione della base

oppure usando le coord. sferiche

$$(3\cos\varphi\cos\vartheta,\ 3\cos\varphi\sin\vartheta,\ 3\sin\varphi) \qquad \begin{matrix} 0 \leq \vartheta \leq 2\pi \\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{matrix}$$

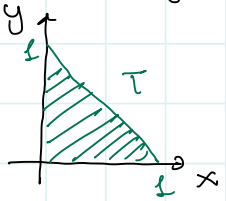
Esempio 4 S = triangolo con vertici in $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$



$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ \underbrace{x+y+z = 1}_{\text{equaz. del piano}}\}$ ← cartesiana

$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in T,\ z = 1-x-y\}$ ← cartesiana

$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1\}$



$\{(u, v, 1-u-v) : (u,v) \in T\}$

PIANO TANGENTE E VETTORE / VERSORE NORMALE

Sup. implicita Setting:

→ Superficie S di equazione $g(x,y,z)=0$

→ $(x_0,y_0,z_0)\in S$, quindi $g(x_0,y_0,z_0)=0$.

Sappiamo che S è una superficie di livello di g, dunque S è "perpendicolare" a ∇g nel punto.

Quindi il piano tangente è il piano che passa per il p.to ed è ortogonale al gradiente

$$g_x(x_0,y_0,z_0)\,x + g_y(x_0,y_0,z_0)\,y + g_z(x_0,y_0,z_0)\,z = \text{cost}$$

quello che si ottiene sostituendo (x_0,y_0,z_0) al posto di (x,y,z) a sinistra

Un vettore normale è proprio $\nabla g(x_0,y_0,z_0)$

Sup. parametrica Setting

→ Data $\Phi(u,v)=(X(u,v),Y(u,v),Z(u,v))$
con $(u,v)\in\Omega$ ← insieme dei parametri

→ Dato $(u_0,v_0)\in\Omega$

→ Trovare piano tangente ad S nel p.to $\Phi(u_0,v_0)$

Si tratta del piano generato da $\Phi_u(x_0,y_0)$ e $\Phi_v(x_0,y_0)$

$$\{\Phi(u_0,v_0) + t\,\Phi_u(u_0,v_0) + s\,\Phi_v(u_0,v_0) \;:\; (t,s)\in\mathbb{R}^2\}$$

$\Phi(u_0,v_0)$: p.to base; Φ_u, Φ_v: derivate di Φ rispetto a u e v

Questa è una descrizione PARAMETRICA DEL PIANO. Se voglio l'eq. cartesiana mi devo procurare un vettore $\perp$ a Φ_u e Φ_v, e per questo c'è la "formula misteriosa" del prodotto vettore

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} \rightsquigarrow (y_u z_v - z_u y_v, -x_u z_v + z_u x_v, x_u y_v - y_u x_v) = (M_1, M_2, M_3)$$

vettore $\perp$ al piano

Quindi l'eq. cartesiana del piano tangente è del tipo

$$\boxed{M_1 x + M_2 y + M_3 z = d}$$

scelto in modo che il piano passi per il punto in questione

Esempio 1 $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^4 + y^2 + 2z^2 = 7\}$

$(x_0, y_0, z_0) = (1, -2, 1) \in S$

Trovare piano tangente

Si tratta di sup. implicita con $g(x,y,z) = x^4 + y^2 + 2z^2 - 7 = 0$.

Calcolo

$$\nabla g(x,y,z) = (4x^3, 2y, 4z)$$
$$\nabla g(1,-2,1) = \boxed{(4, -4, 4)}$$

↑ vettore $\perp$ al piano tangente (ma lo è anche $(1,-1,1)$)

Quindi l'eq. sarà

$$\boxed{x - y + z = 4}$$

imponendo il passaggio per $(1,-2,1)$

Esempio 2 $\Phi(u,v) = \{(u-v, u^2 - v^2, uv) : (u,v) \in [-1,1] \times [-1,1]\}$

Calcolare il piano tangente in $(1,1,0)$

Intanto osservo che $(1,1,0)$ sta nella superficie

$$\begin{cases} u - v = 1 \\ u^2 - v^2 = 1 \\ uv = 0 \end{cases} \quad \dots \text{ risolvendo trovo } u = 1 \text{ e } v = 0$$

Calcolo $\Phi_u = (1, 2u, v)$

$\Phi_v = (-1, -2v, u)$

Sostituisco $u = 1$ e $v = 0$ e viene

$\Phi_u(1,0) = (1, 2, 0)$

$\Phi_v(1,0) = (-1, 0, 1)$

Quindi in parametrica il piano è

$$\boxed{(1,1,0) + t(1,2,0) + s(-1,0,1)}$$

Per andare in cartesiana trovo il prod. vettore

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \boxed{(2, -1, 2)} = (M_1, M_2, M_3)$$

vettore normale alla sup. in $(1,1,0)$.

$$\boxed{2x - y + 2z = 1}$$

imponendo passaggio per $(1,1,0)$

— o — o —

ANALISI 2 — LEZIONE 47

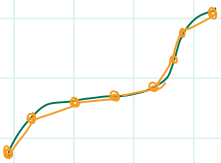
AREA DI UNA SUPERFICIE

1. Come NON si definisce
2. Idea della definizione
3. Come si calcola

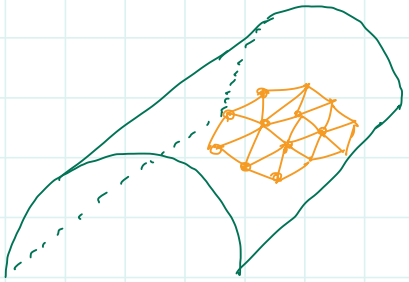
Setting: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ e $\Phi(u,v) = (X(u,v), Y(u,v), Z(u,v))$ $(u,v) \in \Omega$

1 Come non si definisce

Per le curve si faceva il sup della lunghezza delle poligonali inscritte



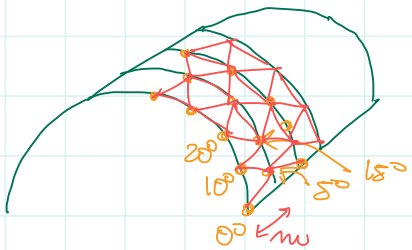
Per le superfici questo porterebbe a fare il sup delle triangolazioni inscritte



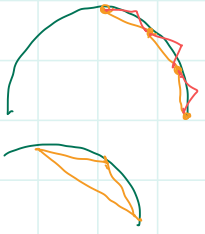
Brutta notizia: tolti casi banali, il sup viene sempre $+\infty$!!

Motivo brutale per cui NON funziona:

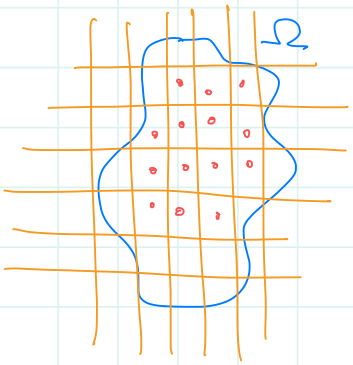
EFFETTO FISARMONICA



Facciamo una triangolazione come in figura.
Quando la distanza ε tra due semicirconferenze diventa molto piccola, i triangoli tendono a diventare "verticali" rispetto alla sup, come quando chiudo una fisarmonica

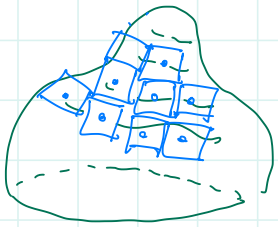


Morale: se infittisco molto i triangoli, allora l'unione dei triangoli mi approssima bene la superficie



② Idea della definizione

→ Dividiamo Ω in rettangolini
→ In ogni rettangolo prendiamo un p.to
→ Invece di considerare Φ di ogni rettangolo, approssimiamo Φ con il suo sviluppo di ordine 1 nel p.to prescelto, e calcoliamo l'immagine del rettangolo mediante questo sviluppo, che è una applic. affine.



Geometricamente, sto approx. la superficie con "pezzi di piano tangente"
È come se stessimo "piastrellando" la superficie.

③ **Formula per il calcolo**

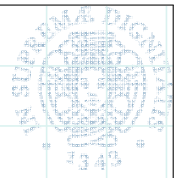
$$\text{Area}(S) = \iint_{\Omega} \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2}\, du\, dv$$

(M_1, M_2, M_3 dipendono da u e v)

Motivo di algebra lineare: cosa succede se sviluppo Φ

$$\Phi(u,v) = \underbrace{\Phi(u_0,v_0) + \Phi_u(u_0,v_0)(u-u_0) + \Phi_v(u_0,v_0)(v-v_0)}_{\text{mappa affine}}$$

La trasformazione a destra manda rettangoli di area 1 in parallelogrammi di area $\sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2}$



Esercizio Consideriamo il piano $ax+by+cz=d$
Calcolare l'area della parte di piano che sta sopra il rettangolo $[0,1]\times[0,1]$.
Facendo il conto, si ottiene la formula di sopra

Parametrizzo la superficie $\left(u, v, \frac{d-au-bv}{c}\right) = \Phi(u,v)$

Calcolo Φ_u e Φ_v

$$\begin{matrix}\Phi_u \to \\ \Phi_v \to\end{matrix}\begin{pmatrix} * & * & * \\ 1 & 0 & -\frac{a}{c} \\ 0 & 1 & -\frac{b}{c}\end{pmatrix} \rightsquigarrow \left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, 1\right) = (M_1, M_2, M_3)$$

$$\text{Area} = \int_0^1 du \int_0^1 dv \sqrt{\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}+1} = \sqrt{\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}+1}$$

Allo stesso risultato si poteva arrivare calcolando l'area in maniera elementare (volendo si tratta di fare l'area di due triangoli nello spazio)

Caso speciale: sup. cartesiana Consideriamo

$$(u, v, f(u,v)) \qquad (u,v)\in\Omega$$

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 1 & 0 & f_u \\ 0 & 1 & f_v\end{pmatrix} \rightsquigarrow (-f_u, -f_v, 1) = (M_1, M_2, M_3)$$

$$\boxed{\text{Area}(S) = \iint_\Omega \sqrt{1+f_u^2+f_v^2}\, du\, dv}$$

Oss. È l'analogo della formula per la lungh. delle curve cartesiane

$(t, f(t))$ con $t \in [a,b] \rightsquigarrow$ lungh $= \int_a^b \sqrt{1+f'(t)^2}\,dt$

Esempio (Area del cilindro)

$\Phi(\theta, z)$

$(r\cos\theta, r\sin\theta, z)$ $\quad 0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le z \le R$

↑ raggio base dato ↑ altezza data

$$\begin{matrix} \Phi_\theta \\ \Phi_z \end{matrix} \begin{pmatrix} * & * & * \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (r\cos\theta, r\sin\theta, 0)$$

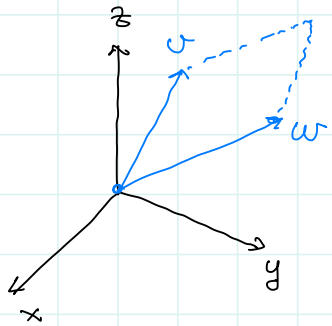
$M_1 \quad M_2 \quad M_3$

$$\text{Area} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R dz \sqrt{M_1^2+M_2^2+M_3^2} = r \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R dz = 2\pi r R$$

$2\pi \quad R$

Oss. Altra formula per l'area

Dati in $\mathbb{R}^3$ due vettori v e w, pensati applicati nell'origine, qui è l'area del parallelogrammo di vertici $0, v, w, v+w$?



L'area è $\sqrt{M_1^2+M_2^2+M_3^2}$, dove $(M_1, M_2, M_3) = v \wedge w$

↑ prodotto vettore

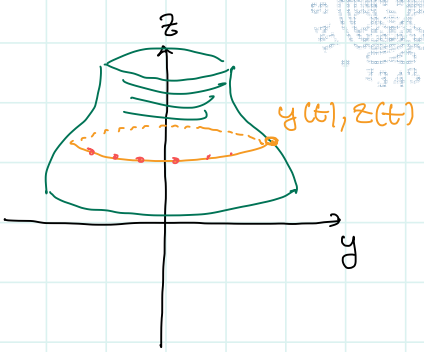
Altro modo di scrivere la stessa cosa. Considero la matrice

$$M = \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix}. \quad \text{Allora } (\text{area})^2 = \det \boxed{M^t M}$$

matrice 2×2

Esercizio: fare il conto e vedere che viene la stessa cosa!

ANALISI 2 — LEZIONE 48



SUPERFICI DI ROTAZIONE

Supponiamo di avere una curva nel piano yz con $y \geq 0$ e di ruotarla di 360° intorno all'asse z.
Ottengo una superficie S.
Obiettivo: calcolare l'area di S.

Se la curva è parametrizzata da

$$\gamma(t) = (y(t), z(t)) \quad \text{con} \quad t \in [a,b]$$

allora

$$\text{Area}(S) = 2\pi \int_a^b y(t) \sqrt{\dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}\, dt$$

che si può anche scrivere come

$$\text{Area}(S) = \text{lungh}(\sigma) \cdot 2\pi y_G$$

GULDINO 2 (per le aree)

lunghezza della circonferenza percorsa da G durante la rotazione

coordinata y del baricentro della CURVA

Dalla prima formula alla seconda il passaggio è banale: basta moltiplicare e dividere per la lunghezza

$$\text{Area}(S) = 2\pi \int_a^b y(t)\sqrt{\dot y(t)^2 + \dot z(t)^2}\,dt$$

$$= \text{lunga}\,\gamma \cdot 2\pi \frac{1}{\text{lunga}\,\gamma} \underbrace{\int_a^b y(t)\sqrt{\dots}\,dt}_{\int_\gamma y\,ds}$$

$$= \text{lunga}(\gamma) \cdot 2\pi \boxed{\frac{\int_\gamma y\,ds}{\text{lunga}(\gamma)}}$$

y_G

Resta da dimostrare la 1ª formula.

1° passo Scrivo una parametrizzazione di S

$$\underbrace{(y(t)\cos\theta,\ y(t)\sin\theta,\ z(t))}_{\text{stiamo prendendo } (y(t), z(t)) \text{ nel piano } yz \text{ e lo ruotiamo intorno all'asse } z} \qquad 0 \le \theta \le 2\pi,\ a \le t \le b$$

2° passo Calcoliamo M_1, M_2, M_3

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ X_\theta & Y_\theta & Z_\theta \\ X_t & Y_t & Z_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * & * \\ -y(t)\sin\theta & y(t)\cos\theta & 0 \\ \dot y(t)\cos\theta & \dot y(t)\sin\theta & \dot z(t) \end{pmatrix}$$

$$(M_1, M_2, M_3) = (\dot z(t)\, y(t)\cos\theta,\ \dot z(t)\, y(t)\sin\theta,\ -y(t)\,\dot y(t))$$

3° passo $\sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} = \sqrt{\dot z(t)^2 y(t)^2 + \dot y(t)^2 y(t)^2}$

$$= y(t)\sqrt{\dot z(t)^2 + \dot y(t)^2}$$

↑ abbiamo supposto la curva nel semipiano $y \ge 0$

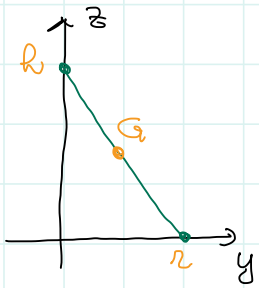
4° passo Integrazione finale

$$\text{Area}(S) = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_a^b dt \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} = 2\pi \int_a^b y(t) \sqrt{\dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}\, dt$$

2π

— o — o —

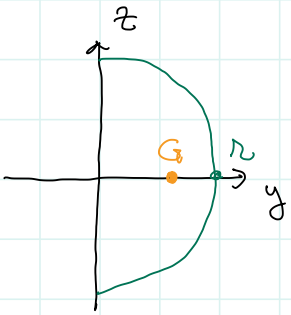
Esempio 1 Superficie laterale cono



$$\text{Area}(S) = \text{lunghezza} \cdot 2\pi y_G$$

$$= \sqrt{R^2 + r^2} \cdot 2\pi \frac{r}{2} = \pi r \sqrt{R^2 + r^2}$$

Esempio 2 Superficie sfera



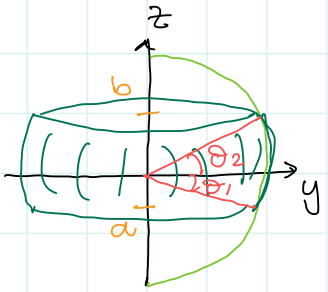
$$\text{Area}(S) = \text{lunghezza} \cdot 2\pi y_G$$

$$= \pi r \cdot 2\pi \boxed{\frac{2}{\pi} r}$$

↑ vedi lezione su baricentro curva

$$= 4\pi r^2$$

Esempio 3 Superficie segmento sferico (solo parte laterale)



Parametrizzo la curva come

$(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta)$ con $\vartheta \in [\vartheta_1, \vartheta_2]$

$$\text{Area}(S) = 2\pi \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \underbrace{r\cos\vartheta}_{y} \underbrace{\sqrt{r^2\sin^2\vartheta + r^2\cos^2\vartheta}}_{\dot{y}^2 + \dot{z}^2} d\vartheta$$

$$2\pi r \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} r\cos\vartheta\, d\vartheta = 2\pi r \{ r\sin\vartheta_2 - r\sin\vartheta_1 \}$$

(Quando $b = r$ e $a = -r$ ritroviamo l'esempio 2)

$$2\pi r (b - a)$$

INTEGRALI SUPERFICIALI

1 Notazioni $\int_S f(x,y,z)\, d\sigma$

S: superficie

$f(x,y,z)$: funzione di 3 variabili definita almeno sul supporto della superficie

$d\sigma$ (d SIGMA): indica che si tratta di integrale superficiale

4 Formula per il calcolo Supponiamo di aver parametrizzato S nel solito modo

$$(X(u,v), Y(u,v), Z(u,v)) \quad \text{con} \quad (u,v) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$$

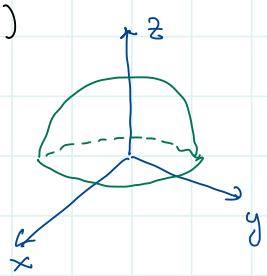
Allora

$$\int_S f(x,y,z)\, d\sigma = \iint_\Omega f(X(u,v), Y(u,v), Z(u,v)) \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2}\, du\, dv$$

Dato l'integrale, possiamo anche definire il baricentro di una superficie come il punto G di coordinate

$$x_G = \frac{1}{\text{Area}(S)} \int_S x\, d\sigma, \quad y_G = \frac{1}{\text{Area}(S)} \int_S y\, d\sigma, \quad z_G = \dots$$

Esempio (Baricentro della semisfera come superficie)



$\text{Area}(S) = 2\pi r^2$. Per simmetria $x_G = y_G = 0$.

Resta da calcolare $\int_S z\, d\sigma$.

Devo parametrizzare la superficie

$$(r\cos\varphi\cos\vartheta,\ r\cos\varphi\sin\vartheta,\ r\sin\varphi) \qquad 0 \le \vartheta \le 2\pi, \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$$

Calcolo M_1, M_2, M_3

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ -r\cos\varphi\sin\vartheta & r\cos\varphi\cos\vartheta & 0 \\ -r\sin\varphi\cos\vartheta & -r\sin\varphi\sin\vartheta & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \left(r^2\cos^2\varphi\cos\vartheta,\ r^2\cos^2\varphi\sin\vartheta,\ r^2\cos\varphi\sin\varphi\right)$$

$$\sqrt{M_1^2+M_2^2+M_3^2} = r^2\sqrt{\cos^4\varphi+\cos^2\varphi\sin^2\varphi} = r^2\cos\varphi$$

Allora $$\int_S z\,d\sigma = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\pi/2} d\varphi\ \underbrace{r\sin\varphi}_{z}\cdot\underbrace{r^2\cos\varphi}_{\sqrt{\dots}}$$

$$= 2\pi r^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi = \pi r^3\left[\sin^2\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi r^3$$

A questo punto $$z_G = \frac{1}{\text{Area}}\int_S z\,d\sigma = \frac{1}{2\pi r^2}\pi r^3 = \frac{r}{2}$$

— o — o —

ANALISI 2 — LEZIONE 49

INTEGRALI DI FLUSSO

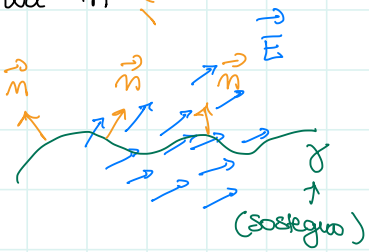
Due variabili Ingredienti

→ Campo vettoriale $\vec{E}(x,y) = (A(x,y), B(x,y))$

→ curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ con $t \in [a,b]$

→ scelta del versore normale alla curva $\vec{n}$

(il versore normale si può scegliere in 2 modi diversi: una volta scelto in un punto, ce lo trasciniamo dietro)



L'integrale di flusso si definisce come

$$\int_\gamma \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds$$

scritto in questo modo è un integrale curvilineo

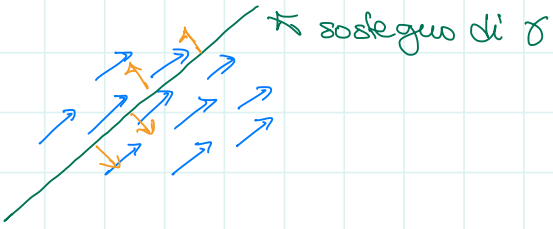
Interpretazione "fisica": → $\vec{E}$ è la direzione del vento

→ il sostegno di γ è una vela

→ $\vec{n}$ indica la direzione in cui si vuole andare

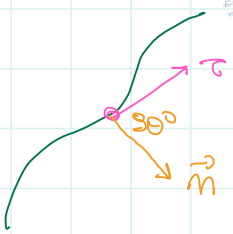
→ L'integrale di flusso è quanto il vento spinge la vela in quella direzione

Correnti con interpretazione fisica: se $\vec{E}$ è $\perp$ a $\vec{n}$, allora il flusso è 0, indipendentemente dal "segno di $\vec{n}$"



Come calcolo $\vec{n}$ Sappiamo che $\vec{n}$ è $\perp$ al tangente alla curva

Poniamo $\vec{\tau} = \left(\frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2}}, \frac{\dot{y}(t)}{\sqrt{\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2}} \right)$



Ruotando di 90° in verso orario

$$\vec{n} = \left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}, -\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} \right)$$

↑ scelta canonica del versore normale

Con questa scelta l'integrale diventa

$$\int_\gamma \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds = \int_a^b \left\{ A(x(t),y(t)) \frac{\dot{y}(t)}{\sqrt{\dots}} - B(x(t),y(t)) \frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{\dots}} \right\} \underbrace{\sqrt{\dots}\, dt}_{ds}$$

$$= \int_a^b \{ A(x(t),y(t)) \dot{y}(t) - B(x(t),y(t)) \dot{x}(t) \} dt$$

$$= \int_\gamma A\,dy - B\,dx$$

Abbiamo ottenuto che

integrale curvilineo — integrale di forma diff.

$$\int_\gamma \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds = \int_\gamma A\,dy - B\,dx$$

↑ versore normale canonico, ottenuto ruotando di 90° in verso ORARIO il versore tangente a γ

Oss. Se il versore $\vec{n}$ dato non è quello canonico, allora basta cambiare i segni.

Tre variabili Ingredienti

→ Campo di vettori $\vec{E} = (A, B, C)$

(tutto ora dipende da x, y, z)

→ Una superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$

→ Una scelta $\vec{n}$ del versore normale ad S

↑ (tra le 2 possibili, posto che esistano)

Sicché in questo caso l'integrale si definisce come

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma$$

↑ integrale superficiale

Come calcolo $\vec{n}$?

Supponiamo di aver parametrizzato la superficie con

$$\Phi(u,v) = (X(u,v), Y(u,v), Z(u,v)) \qquad (u,v) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$$

Calcoliamo (M_1, M_2, M_3) con la formula misteriosa $\Phi_u \wedge \Phi_v$

Allora il versore normale canonico è

$$\frac{1}{\sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2}} (M_1, M_2, M_3)$$

Da questo si ottiene

integrale superficiale — Integrale doppio standard

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma = \iint_\Omega (A M_1 + B M_2 + C M_3) \, du \, dv$$

se $\vec{n}$ è il versore normale canonico

$A(X(u,v), Y(u,v), Z(u,v)) M_1(u,v) + \dots$

TEOREMA DELLA DIVERGENZA

Due Variabili Ingredienti

→ un campo di vettori $\vec{E} = (A, B)$ (tutto dipende da (x, y))

→ un insieme $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$.

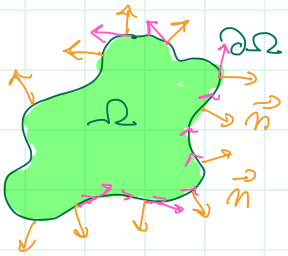
Allora vale la formula

integr. curv. — formula di prima

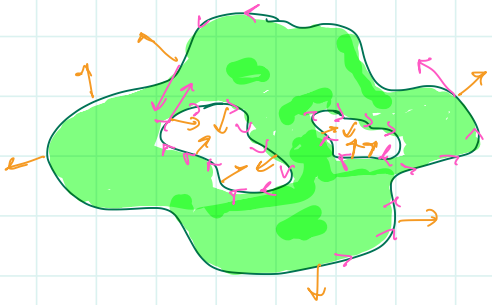
$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E}\, dx\, dy = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle\, ds = \int_{\gamma^+} A\, dy - B\, dx$$

- $\iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E}\, dx\, dy$: integrale doppio di una funzione
- $\partial\Omega$: bordo di Ω
- $\vec{n}$: normale USCENTE da Ω
- γ^+: curva che percorre $\partial\Omega$ lasciando Ω alla propria SINISTRA

Oss. Se la curva è percorsa lasciando Ω a sinistra, allora la normale esterna $\vec{n}$ al $\partial\Omega$ si ottiene ruotando di 90° in verso orario il tangente alla curva



Nel caso in cui Ω ha dei buchi, occhio ai versi di percorrenza dei bordi interni



Tre variabili Ingredienti:

→ campo vettoriale $\vec{E} = (A, B, C)$

→ insieme $V \subseteq \mathbb{R}^3$.

Allora vale la formula

integrale triplo di una funzione — normale ESTERNA a V

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{E}\, dx\,dy\,dz = \int_{\partial V} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle\, d\sigma$$

$$= \iint_\Omega (A M_1 + B M_2 + C M_3)\, du\,dv$$

si intende che $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ e $\phi: \Omega \to \mathbb{R}^3$ è una parametrizzazione di ∂V per cui il versore normale canonico è proprio $\vec{n}$.

Achtung! Fare attenzione a 3 cose:

1. L'orientazione
2. L'orientazione
3. L'orientazione

— o — o —

ANALISI 2 – LEZIONE 50

TEOREMA DI GAUSS–GREEN (AKA formula di integrazione per parti in n variabili)

Due variabili Ingredienti

- un insieme $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$
- un campo di vettori $\vec{E} = (A, B)$
- una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$

Allora vale la formula

(normale esterna rispetto ad Ω)

$$\iint_\Omega f \operatorname{div} \vec{E}\, dx\,dy = \int_{\partial\Omega} f \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle\, ds - \iint_\Omega \langle \nabla f, \vec{E} \rangle\, dx\,dy$$

integrale in 2 variabili in Ω — integrale curvilineo su bordo di Ω — integrale in 2 variabili in Ω

Analisi 1 La formula di integrazione per parti era

$$\int_a^b f(x) g'(x)\, dx = [f(x) g(x)]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f'(x) g(x)\, dx$$

Tre variabili Ingredienti

- Un insieme $V \subseteq \mathbb{R}^3$
- Un campo di vettori $\vec{E} = (A, B, C)$
- una funzione $f : V \to \mathbb{R}$

$$\iiint_V f \operatorname{div} \vec{E}\, dx\,dy\,dz = \int_{\partial V} f \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle\, d\sigma - \iiint_V \langle \nabla f, \vec{E} \rangle\, dx\,dy\,dz$$

normale esterna

GG ⇒ Teo della divergenza Basta prendere $f \equiv 1$ costante, per cui $\nabla f \equiv 0$ e si ottiene il teo. della divergenza

Teo della div. implica GG Scriviamolo in $\mathbb{R}^2$

Ipotesi $$\iint_\Omega \operatorname{div} \vec{E}_1 \, dx\,dy = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}_1, \vec{n} \rangle \, ds$$

Tesi $$\iint_\Omega f \operatorname{div} \vec{E} \, dx\,dy = \int_{\partial\Omega} f \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds - \iint_\Omega \langle \nabla f, \vec{E} \rangle \, dx\,dy$$

Basta applicare l'ipotesi con $\vec{E}_1 = f \cdot \vec{E}$ (questo è un campo).
Abbiamo dim. in una lez. prec. che

$$\operatorname{div}(\vec{E}_1) = f \operatorname{div} \vec{E} + \langle \nabla f, \vec{E} \rangle$$

Si ottiene che

$$\iint (f \operatorname{div} \vec{E} + \langle \nabla f, \vec{E} \rangle) \, dx\,dy = \int_{\partial\Omega} \langle f \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds$$

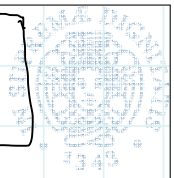
basta portarlo a dx

$$= \int_{\partial\Omega} f \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds$$

Oss. GG è come l'integrazione per parti di Analisi 1
Il teo. della div è come dire che l'integrale di una derivata è la differenza tra i valori agli estremi.

Le tre variabili è tutto uguale, solo con gli integrali superficiali invece che curvilinei.

Applicazione in due variabili: integrali su insiemi descritti mediante il loro bordo

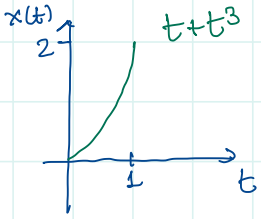


Esempio 1 Consideriamo la curva

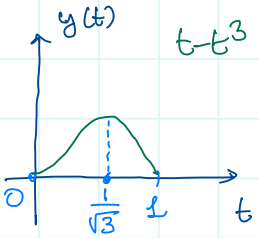
$$\gamma(t) = (t+t^3,\ t-t^3) \qquad t \in [0,1]$$

Facciamo un disegno approssimativo

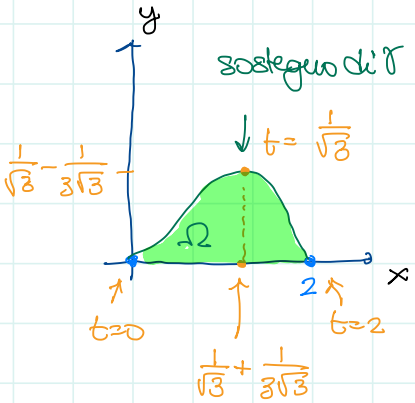
Disegniamo le 2 componenti



↑ componente monotona
⇒ curva semplice



$\dot{y}(t) = 1-3t^2$



Consideriamo l'insieme Ω limitato dall'asse x e dal sostegno della curva (insieme descritto mediante il bordo).
Calcolare le coordinate del baricentro di Ω, cioè $\text{Area}(\Omega)$ e

$$\iint_\Omega x\,dx\,dy \qquad \iint_\Omega y\,dx\,dy$$

Grosso guaio: non abbiamo una descrizione di Ω come insieme normale

Idea: il teorema della divergenza trasforma integrali all'interno di Ω in integrali sul bordo !!

$$\iint_\Omega \operatorname{div}\vec{E}\,dx\,dy = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle\, ds = \int_{\sigma^+} A\,dy - B\,dx$$

se questa fosse $\equiv 1$, a sx avrei l'area Ω

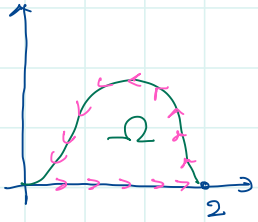
Scegliamo $\vec{E}$ con $\operatorname{div}\vec{E} = 1$, cioè $Ax + By = 1$, ad esempio

$$\vec{E} = (x, 0)$$

$$\text{Area}(\Omega) = \iint_\Omega \operatorname{div}\vec{E}\, dx\,dy = \int_{\gamma^+} x\,dy - 0\,dx$$

γ^+: curva che percorre $\partial\Omega$ lasciando Ω a sinistra

La curva γ^+ che ci serve è uguale a un pezzo di asse x seguita dalla curva data PERCORSA AL CONTRARIO



$\gamma_1(t) = (t, 0)$ con $t \in [0, 2]$ ← pezzo di asse x

$\gamma_2(t) = (t + t^3, t - t^3)$ con $t \in [0, 1]$ AL CONTRARIO

Quindi $$\text{Area}(\Omega) = \int_{\gamma^+} x\,dy = \int_{\gamma_1} x\,dy - \int_{\gamma_2} x\,dy$$

(γ_2: percorsa al contrario)

$$= \int_0^2 t \cdot 0\, dt - \int_0^1 (t + t^3)(1 - 3t^2)\, dt = \text{si fa...}$$

($x(t)$, $\dot{y}(t)$; $x(t)$, $\dot{y}(t)$)

In alternativa, potevo scegliere $\vec{E} = (0, y)$ e quindi

$$\text{Area}(\Omega) = \iint_\Omega \operatorname{div}\vec{E}\, dx\,dy = \int_{\gamma^+} A\,dy - B\,dx = \int_{\gamma^+} -y\,dx$$

(γ^+: stessa di prima)

$$= -\int_{\gamma_1} y\,dx + \int_{\gamma_2} y\,dx = -\int_0^2 0 \cdot 1\,dt + \int_0^1 (t - t^3)(1 + 3t^2)\, dt$$

(γ_2: 2 seguito; $y(t)$, $\dot{x}(t)$; $y(t)$, $\dot{x}(t)$)

= ... si fa e viene uguale a prima (si spera 😉)

Se su Ω voglio integrare x, basta scegliere $\vec{E} = \left(\frac{1}{2}x^2, 0\right)$ oppure $\vec{E} = (0, xy)$ oppure $\vec{E} = (\arctan y + e^y, xy + \sin(x))$ o qualunque altra cosa con $\operatorname{div}\vec{E} = x$.

Ad esempio, utilizzando il secondo viene

$$\iint_\Omega x\,dx\,dy = \iint_\Omega \operatorname{div}\vec{E}\,dx\,dy = \int_{\sigma^+} A\,dy - B\,dx = -\int_{\sigma^+} xy\,dx$$

(σ^+: sdrito)

$$= -\int_{\gamma_1} xy\,dx + \int_{\gamma_2} xy\,dx = \int_0^1 (t+t^3)(t-t^3)(1+3t^2)\,dt$$

(0 su γ_1; $x(t)$, $y(t)$, $\dot{x}(t)$)

$$= \text{si fa...}$$

Analogamente per integrare y posso scegliere

$$\vec{E} = (xy, 0) \quad \text{oppure} \quad \vec{E} = \left(0, \frac{1}{2}y^2\right)$$

o cose più creative :).

— o — o —

ANALISI 2 — LEZIONE 51

Formula per l'area di un sottoinsieme del piano dato il bordo

$$\text{Area}(\Omega) = \int_{\gamma^+} x\,dy = -\int_{\gamma^+} y\,dx$$

dove γ^+ è una curva o una unione di curve che percorre $\partial\Omega$ lasciando Ω a sinistra.

Dim Usare teo. della div con $\vec{E} = (x,0)$ oppure $\vec{E} = (0,y)$.

Oss. Valgono anche formule creative del tipo

$$\text{Area}(\Omega) = \frac{1}{2}\int_{\gamma^+} x\,dy - y\,dx = \frac{1}{3}\int_{\gamma^+} x\,dy - \frac{2}{3}\int_{\gamma^+} y\,dx$$

(si ottengono con $\vec{E} = (\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y)$ oppure $\vec{E} = (\frac{1}{3}x, \frac{2}{3}y)$).

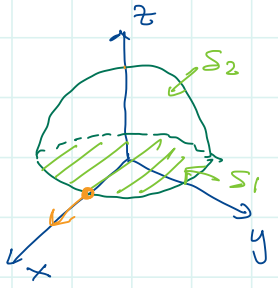
In maniera analoga possiamo ottenere formule per il volume di solidi data una parametrizzazione del bordo.

Esempio Calcolo volume semisfera con teo divergenza

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 1,\ z \ge 0\}$$

Per il teo. della divergenza scelgo $\vec{E} = (0,0,z)$ e ottengo

$$\text{Vol}(V) = \iiint_V \text{div}\,\vec{E}\,dx\,dy\,dz = \int_{\partial V} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle\,d\sigma$$



Occorre capire come parametrizzare il bordo, che è fatto da 2 pezzi.

S_1 si parametrizza come $(u, v, 0)$ con $\underbrace{u^2+v^2 \le 1}_{\Omega}$

Quindi

	*	*	*
Φ_u	1	0	0
Φ_v	0	1	0

$\rightsquigarrow (M_1, M_2, M_3) = (0, 0, 1) = \vec{n}$ è la normale esterna, ma a noi serve quella ESTERNA

Quindi

$$\int_{S_1} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma = \int_{S_1} \langle (0,0,z), (0,0,-1) \rangle \, d\sigma = 0$$

((M_1, M_2, M_3) cambiato di segno; $=0$ su S_1)

S_2 si parametrizza in coord. sferiche, quindi

$(\cos\varphi\cos\vartheta, \cos\varphi\sin\vartheta, \sin\varphi)$ con $\vartheta \in [0, 2\pi]$ e $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$

Per gentile concessione della Les. 48 troviamo che

$$(M_1, M_2, M_3) = (r^2\cos^2\varphi\cos\vartheta,\ r^2\cos^2\varphi\sin\vartheta,\ r^2\cos\varphi\sin\varphi)$$

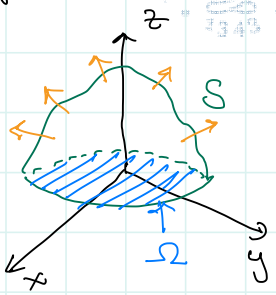
È la $\vec{n}$ giusta o bisogna cambiare segno? Vediamo che succede al polo Nord, cioè $\varphi = \frac{\pi}{2}$ e non va benissimo :(
Proviamo all'equatore, ad esempio in $(1,0,0)$ cioè $\varphi = 0$ e $\vartheta = 0$

$$(M_1, M_2, M_3) = (1, 0, 0)$$

quindi è la $\vec{n}$ giusta, quindi

$$\int_{S_2} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma = \underbrace{\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi}_{\text{descrizione di dove variano i parametri}} \underbrace{\sin^2\varphi\cos\varphi}_{AM_1+BM_2+CM_3} = 2\pi \left[\frac{1}{3}\sin^3\varphi\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \frac{2\pi}{3}$$ ☺

TECNICA DI SOSTITUZIONE DELLA SUPERFICIE (negli integrali di flusso)



Esempio $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^4 = 1,\ z \geq 0\}$
orientazione "verso l'alto"
$\vec{E} = (x, \arctan x + z^2, \sin y + z)$

Calcolare $\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma$

1° metodo Se voglio usare la definizione, devo per forza parametrizzare S. Un possibile modo è cartesiano

$$(u, v, \sqrt[4]{1-u^2-v^2}) \quad \text{con} \quad \underbrace{u^2+v^2 \leq 1}_{\text{base } \Omega}$$

Con un po' di pazienza calcolo M_1, M_2, M_3 e infine

$$\iint_\Omega (A M_1 + B M_2 + C M_3)\, du\, dv$$

Auguri, sono un po' di conti 😬

2° metodo Consideriamo il solido V che ha come bordo la superficie S data e la sua base Ω.
Il teo. della div ci dice che

$$\underbrace{\iiint_V \operatorname{div} \vec{E}\, dx\,dy\,dz}_{①} = \int_{\partial V} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma$$

$$= \underbrace{\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma}_{②} + \underbrace{\int_\Omega \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma}_{③}$$

② = ① − ③, quindi se so fare ① e ③, allora so fare ②, che è quello che voglio.

$\operatorname{div} \vec{E} = 2$, quindi $\iiint_V \operatorname{div} \vec{E}\, dx\,dy\,dz = 2\,\mathrm{Vol}(V)$

e questo si può fare per sezioni lungo asse z:

$$\mathrm{Vol}(V) = \int_0^1 dz\ \mathrm{Area}(S_z) = \pi \int_0^1 (1-z^4)\,dz = \text{si fa } \ddot\smile$$

$\mathrm{Area}(S_z)$: cerchio di raggio $\sqrt{1-z^4}$

$$\textcircled{3} = \int_\Omega \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle\, d\sigma = \int_\Omega (\sin y + z)\, d\sigma$$

$\vec{n}$: vettore $(0,0,-1)$ dove essere la normale esterna a V

$z = 0$ su Ω

$$= \int_\Omega \sin y\, dx\,dy$$

Ω si parametrizza come $(u, v, 0)$ $= 0$ per simmetria $\ddot\smile$

Morale: $\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle\, d\sigma = 2\,\mathrm{Vol}(V)$ = si fa facile !!

Oss. Se fosse accaduto che $\operatorname{div} \vec{E} = 0$, allora avremmo avuto che

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle\, d\sigma = -\int_{S_1} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle\, d\sigma$$

dove S_1 è una QUALUNQUE superficie che insieme ad S costituisce il bordo di un solido V, di cui $\vec{n}$ è la normale esterna.

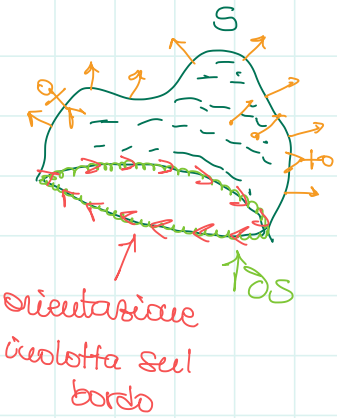
Morale: $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ vuol dire che nulla si crea e nulla si distrugge all'interno di V, quindi ciò che entra da S è uguale a ciò che esce da S_1 e viceversa

— o — o —

ANALISI 2 — LEZIONE 52

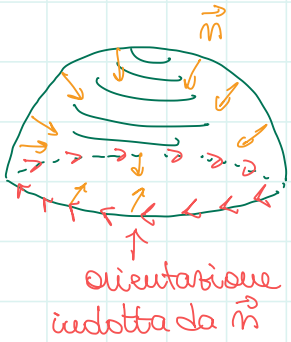
ORIENTAZIONE DEL BORDO DI UNA SUPERFICIE

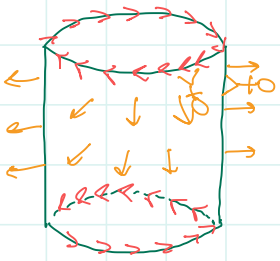
Data una superficie con una orientazione fissata (cioè una scelta del versore normale $\vec{n}$) vogliamo definire la corrispondente orientazione del bordo.



Si dice orientazione di ∂S indotta da $\vec{n}$ il verso di percorrenza di un omino che percorre il bordo di S lasciando S alla sua sinistra e rimanendo in piedi secondo l'orientazione stabilita da $\vec{n}$

Esempi





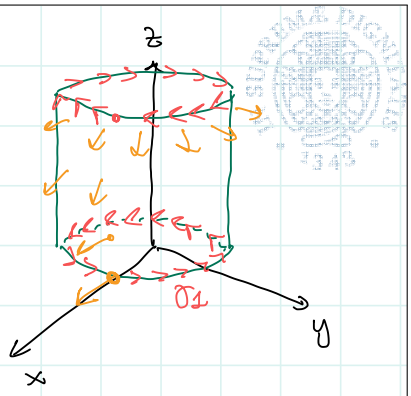
Matematicamente come posso "vedere" tutto ciò?

- Scrivo una parametrizzazione $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^3$ della superficie, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$.
- Verifico che $\vec{n}$ ottenuto a partire da $\Phi_u \wedge \Phi_v$ sia proprio l'orientazione voluta della superficie
- Parametrizzo $\partial\Omega$ (nel piano) con una curva che lascia Ω a sinistra. L'immagine della curva percorre ∂S nel verso giusto.

Esempio (cilindro)

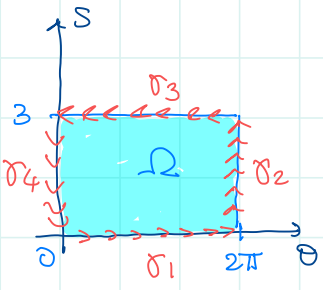
$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 4,\ z \in [0,3]\}$$

con orientazione verso l'esterno



① Parametrizzo il cilindro

$$(2\cos\vartheta, 2\sin\vartheta, s) \qquad \underbrace{0 \le \vartheta \le 2\pi,\ 0 \le s \le 3}_{\text{insieme } \Omega \text{ dove variano i parametri}}$$



② $$\begin{pmatrix} * & * & * \\ -2\sin\vartheta & 2\cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (2\cos\vartheta, 2\sin\vartheta, 0) \quad (N_1, N_2, N_3)$$

Dividendo per la norma viene $\vec{n} = (\cos\vartheta, \sin\vartheta, 0)$

Domanda: è quello giusto? Sì, perché ad esempio per $\vartheta = 0$, cioè sul semiasse positivo delle x, viene $(1,0,0)$

③ $\partial\Omega$ è dato da 4 curve che percorrono i lati come in figura

$\gamma_1(t) = (t, 0)$ con $t \in [0, 2\pi]$

$\gamma_2(t) = (2\pi, t)$ con $t \in [0,3]$

$\gamma_3(t) = (t, 3)$ con $t \in [0, 2\pi]$ percorsa al contrario

$\gamma_4(t) = (0, t)$ con $t \in [0,3]$ percorsa al contrario

In alternativa, se non voglio dover ricordare di percorrere al contrario, basta fare

$\gamma_3(t) = (2\pi - t, 3)$ con $t \in [0, 2\pi]$

$\gamma_4(t) = (0, 3-t)$ con $t \in [0,3]$

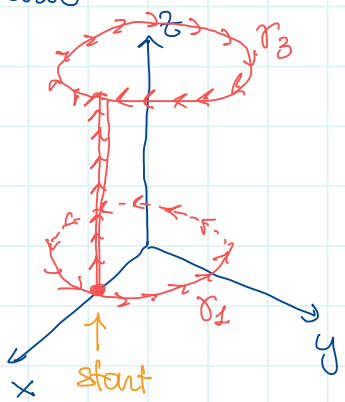
Cosa diventano le 4 curve sulla superficie?

γ_1 diventa $(2\cos t, 2\sin t, 0)$

γ_3 diventa $(2\cos t, 2\sin t, 3)$ percorsa al contrario

γ_2 diventa $(2, 0, t)$

γ_4 diventa $(2, 0, t)$ percorsa al contrario



Morale: γ_1 e γ_3 si ritrovano a parametrizzare il bordo con l'orientazione giusta, mentre γ_2 e γ_4 si cancellano tra di loro

TEOREMA DEL ROTORE (AKA FORMULA DI STOKES)

Ingredienti: → una superficie S con un bordo ∂S

→ una orientazione $\vec{n}$ di S e la corrispondente orientazione di ∂S

→ un campo di vettori $\vec{E} = (A, B, C)$

(tutto dipende da (x, y, z))

Allora vale la formula

integrale superficiale — integrale curvilineo — integrale di forma diff.

$$\int_S \langle \operatorname{rot}\vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma = \int_{\partial S} \langle \vec{E}, \vec{\tau} \rangle \, ds = \int_{\gamma^+} A\,dx + B\,dy + C\,dz$$

orientazione della superficie — versore tangente al ∂S con l'orientazione indotta da $\vec{n}$ — una o più curve che percorrono ∂S nel verso giusto

Detto a parole: il flusso di un rotore attraverso una sup. S è uguale alla circuitazione del campo lungo il bordo

L'ultima uguaglianza è ovvia se si pensa alla formula per $\vec{\tau}$.
Infatti se $(x(t), y(t), z(t))$ è una curva che percorre il bordo, allora

$$\vec{\tau} = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}} (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

A questo punto

$$\int_{\partial S} \langle \vec{E}, \vec{\tau} \rangle \, dS = \int_\gamma \underbrace{(A\dot{x}+B\dot{y}+C\dot{z}) \frac{1}{\sqrt{\dots}}}_{\langle \vec{E}, \vec{\tau} \rangle} \underbrace{\sqrt{\dots}\, dt}_{dS}$$

$$= \int_\gamma A\,dx + B\,dy + C\,dz$$

$$= \int_a^b \left(A(x(t), y(t), z(t)) \dot{x}(t) + \dots + \dots \right) dt$$

ANALISI 2 — LEZIONE 53

INVERSIONE DEL ROTORE

Problema: dato un campo di vettori $\vec{E}$ trovare, posto che esista, un campo di vettori $\vec{F}$ tale che

$$\vec{E} = \text{rot}(\vec{F})$$

Condizione necessaria è che $\text{div}\,\vec{E} = 0$ (cioè se $\text{div}\,\vec{E} \neq 0$, allora $\vec{F}$ di sicuro non esiste)

La cond. nec. diventa suff. se l'insieme di definizione è fatto bene, ad esempio tutto $\mathbb{R}^3$, oppure un insieme convesso o stellato (sempl. conn. NON basta).

In tal caso, come trovo $\vec{F}$?

Esempio $\vec{E} = (x+y^2,\ y-z,\ -2z+\sin y)$

Si vede che $\text{div}\,\vec{E} = 0$ ed è definito su tutto $\mathbb{R}^3$.

Quindi $\vec{F}$ esiste!

Posto $\vec{F} = (A, B, C)$

$$\begin{matrix} * & * & * \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A & B & C \end{matrix} \qquad \text{rot}(\vec{F}) = (C_y - B_z,\ A_z - C_x,\ B_x - A_y)$$

Dobbiamo quindi risolvere

$$\begin{aligned} C_y - B_z &= x+y^2 \\ A_z - C_x &= y-z \\ B_x - A_y &= -2z+\sin y \end{aligned}$$

Posso porre uguale a 0 una a scelta delle 3 componenti, ad esempio $C \equiv 0$. Il sistema diventa

$$\begin{cases} -B_z = x+y^2 \\ A_z = y-z \\ B_x - A_y = -2z + \sin y \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} B = -xz - y^2 z + \boxed{\varphi(x,y)} \\ A = yz - \frac{1}{2}z^2 + \boxed{\psi(x,y)} \end{cases}$$

↑ spariscono quando derivo rispetto a z

Posso porre uguale a 0 una a scelta tra φ e ψ, ad esempio φ. Abbiamo

$$B = -xz - y^2 z$$
$$A = yz - \frac{1}{2}z^2 + \psi(x,y)$$

Sostituisco nella terza equazione:

$$(-xz - y^2 z)_x - (yz - \tfrac{1}{2}z^2 + \psi(x,y))_y = -2z + \sin y$$

$$-\cancel{z} - \cancel{z} - \psi_y = -\cancel{2z} + \sin y$$

DEVE SUCCEDERE che se ne vanno tutte le z, come conseguenza di $\operatorname{div} \vec{E} = 0$

$$\rightsquigarrow \psi_y = -\sin y$$
$$\rightsquigarrow \psi = \cos y.$$

Quindi una possibile soluzione è

$$\left(yz - \tfrac{1}{2}z^2 + \cos y,\ -xz - y^2 z,\ 0\right) = \vec{F}$$

[Costa 30 sec. verificare che il $\operatorname{rot} \vec{F}$ sia davvero $\vec{E}$)

<u>Esercizio</u> Possiamo fare in modo che la terza componente di $\vec{F}$ sia x^2yz ?

Certo, basta ricordare che possiamo aggiungere ad $\vec{F}$ un gradiente qualunque ed il rotore non cambia ($\operatorname{rot} \nabla g = 0$).

Scelgo g t.c. $g_z = x^2yz$, ad esempio

$$g(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2yz^2$$

Quindi un'altra soluzione è

$$\vec{F}_1 = \vec{F} + \left(xyz^2, \frac{1}{2}x^2z^2, x^2yz\right)$$ [Fare la verifica per credere!]

— o — o —

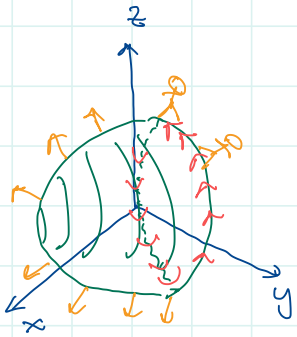
Esempio 1 S = solita semisfera

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1, \ x \geq 0\}$

Orientazione uscente rispetto al centro

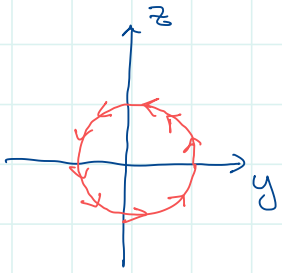
$$\vec{E} = (x+y, y^2, zx)$$

Calcolare $\int_S \langle \operatorname{rot} \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma$



1° modo Calcolo il rotore

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A & B & C \end{pmatrix} \rightsquigarrow (C_y - B_z, A_z - C_x, B_x - A_y)$$



$$\operatorname{rot} \vec{E} = (0, -z, -1)$$

Ora parametrizzo la superficie, ad esempio con le coord. sferiche classiche

$(\cos\varphi\cos\vartheta, \cos\varphi\sin\vartheta, \sin\varphi)$ $\quad -\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

condizione $x \geq 0$

Calcolo M_1, M_2, M_3 (fatto + volte in les. precedenti) e controllo che induca orientazione corretta (e lo fa)

Concludo calcolando l'integrale

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \; (A M_1 + B M_2 + C M_3)$$

($M_1 \to 0$, $M_2 \to -\sin\varphi$, $M_3 \to -1$)

dove A, B, C sono le componenti del rotore

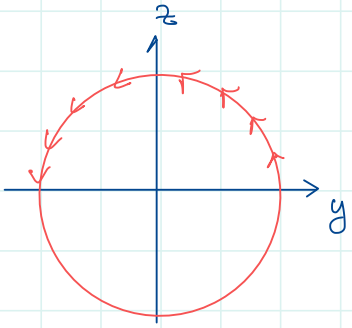
2° modo Uso Stokes

$$\int_S \langle \operatorname{rot} \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma = \int_\gamma A\,dx + B\,dy + C\,dz$$

(componenti di E; γ: curva che percorre ∂S nel VERSO giusto.)

Una parametriz. del bordo è

$$\gamma(\theta) = (0, \cos\theta, \sin\theta) \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$



$$\int_\gamma A\,dx + B\,dy + C\,dz$$

$$= \int_0^{2\pi} (x(\theta) + y(\theta))\, \dot{x}(\theta) + y(\theta)^2 \dot{y}(\theta) + z(\theta) x(\theta) \dot{z}(\theta)\, d\theta$$

($\dot{x}(\theta) \to 0$, $x(\theta) \to 0$)

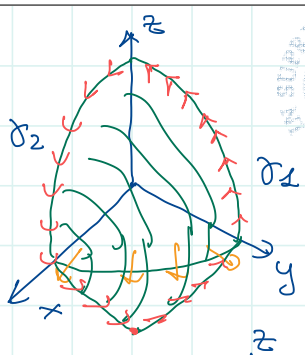
$$= \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\,(-\sin\theta)\, d\theta = \left[\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 0$$

Esempio 1 bis Come sopra, ma con

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$$

Stesso $\vec{E}$ e stessa $\vec{n}$ di prima.

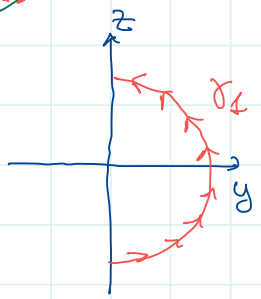
Ora S è $\frac{1}{4}$ di sfera.



L'unica cosa da capire è come è fatto, e soprattutto ORIENTATO, ∂S

Il bordo è fatto da 2 curve

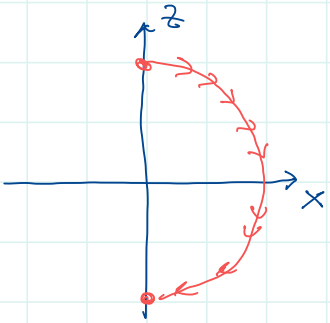
$\gamma_1(t) = (0, \cos t, \sin t)$ con $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$



$\gamma_2(t) = (\cos t, 0, \sin t)$ con $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

↑

PERCORSA AL CONTRARIO



— o — o —

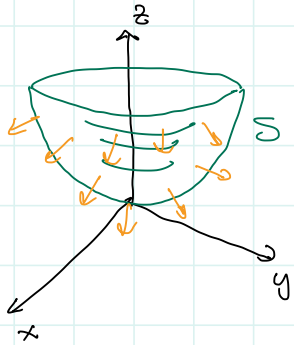
ANALISI 2 — LEZIONE 54

QUATTRO STRATEGIE PER CALCOLARE UN INTEGRALE DI FLUSSO

Dati → una superficie S
→ una orientazione di S
→ un campo di vettori $\vec{E}$

Obiettivo: calcolare

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma$$



Esempio $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2+y^2 \leq 1\}$
$\vec{n}$ = verso il basso (si può dire che in $(0,0,0)$ viene $\vec{n} = (0,0,-1)$)
$\vec{E} = (y^2, y-z, xy-z)$

ROAD MAP 1 — **Uso la definizione**

→ parametrizzo S con $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^3$
→ controllo che $\vec{n}$ venga quello giusto (altrimenti cambio segno)
→ calcolo

$$\iint_\Omega (AM_1 + BM_2 + CM_3) \, du \, dv$$

Nel nostro caso $\Phi(u,v) = (u, v, u^2+v^2)$ con Ω = cerchio unitario

*	*	*	
1	0	$2u$	$\rightsquigarrow (M_1, M_2, M_3) = (-2u, -2v, 1)$
0	1	$2v$	

Per $(u,v) = 0$ trovo $\Phi(u,v) = (0,0,0)$ e (M_1, M_2, M_3) viene quello sbagliato, quindi basta cambiare segno

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = -\iint_\Omega \{ \underbrace{v^2}_{A} \underbrace{(-2u)}_{M_1} + \underbrace{(v-u^2-v^2)}_{B} \underbrace{(-2v)}_{M_2} + \underbrace{(uv-u^2-v^2)}_{C} \underbrace{1}_{M_3} \} du dv$$

cambio di segno richiesto

Questo si calcola in coord. polari $u = \rho\cos\theta$, $v = \rho\sin\theta$

$0 \le \rho \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$

--- si fa ---

[Commenti: fattibile sempre, ma bisogna essere capaci di parametrizzare la superficie]

ROAD MAP 2 **Stokes con inversione del rotore**

→ Spero che $\vec{E}$ sia il rotore di un certo $\vec{F}$

→ Calcolo $\vec{F}$ invertendo il rotore

→ Uso stokes riducendomi alla circuitazione di $\vec{F}$ lungo ∂S

Nel nostro caso $\vec{E} = (y^2, y-z, xy-z)$, quindi $\operatorname{div}\vec{E} = 0$

Essendo definito su $\mathbb{R}^3$, posso invertire il rotore

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A & B & C \end{pmatrix} \rightsquigarrow (C_y - B_z, A_z - C_x, B_x - A_y)$$

$$C_y - B_z = y^2$$
$$A_z - C_x = y - z$$
$$B_x - A_y = xy - z$$

Questa volta scegliamo $B = 0$ $\quad C_y = y^2$

$$A_z - C_x = y - z$$
$$-A_y = xy - z$$

Ricavo A e C: $C = \frac{1}{3}y^3 + \varphi(x,z)$

$A = -\frac{1}{2}xy^2 + yz + \psi(x,z)$

Scelgo di porre $\psi = 0$, quindi $C = \frac{1}{3}y^3 + \varphi(x,z)$

$A = -\frac{1}{2}xy^2 + yz$

$A_z - C_x = \cancel{y} - \varphi_x = \cancel{y} - z$ (Buon segno che y se ne vada)

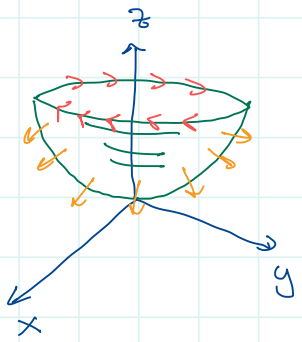
$\varphi(x,z) = xz$ da cui

$A = -\frac{1}{2}xy^2 + yz$

$B = 0$

$C = \frac{1}{3}y^3 + xz$

Sarebbe opportuno dedicare 30 sec. alla verifica che il rot di questo $\vec{F}$ sia proprio $\vec{E}$



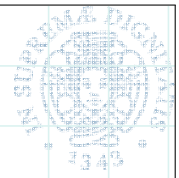
Parametrizziamo $\partial S = (\cos t, \sin t, 1)$ con $t \in [0, 2\pi]$ invertendo il verso !!

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = -\int_\gamma \left(-\frac{1}{2}xy^2 + yz\right)dx + \left(\frac{1}{3}y^3 + xz\right)\underbrace{dz}_{0}$$

$$= -\int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2}\cos t \sin^2 t + \sin t\right)(-\sin t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2}\sin^3 t \cos t + \sin^2 t \, dt = \text{si fa facile}$$

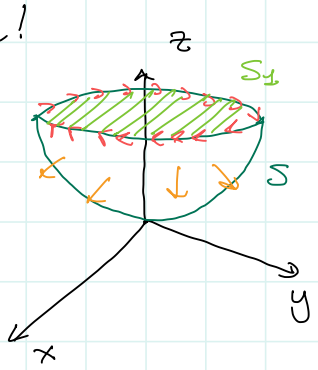
ROAD MAP 3 — **Stokes con cambio superficie**



→ spero che $\operatorname{div} \vec{E} = 0$

→ sostituisco S con un'altra superficie che abbia lo stesso bordo con la stessa orientazione

→ calcolo il flusso su quest'altra superficie!



Nel nostro caso uso come S_1 il tappo sopra.

ORIENTATO COME?

Devo orientarlo verso il basso, cioè con

$$\vec{n} = (0,0,-1)$$

Ora

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_{S_1} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma$$

↑ normale a S_1, cioè $(0,0,-1)$

Ora $S_1 = (x, y, 1)$ con $x^2+y^2 \le 1$, quindi

$$\int_{S_1} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \iint_{x^2+y^2 \le 1} (xy - 1)(-1)\, dx\, dy$$

↑ $xy - z$; ↑ 3ª comp. di n

$$= \underbrace{\iint_{x^2+y^2 \le 1} -xy\, dx\, dy}_{0} + \text{Area} = +\pi$$

Cosa c'è sotto? Sia $\vec{F}$ tale che $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{E}$. Allora

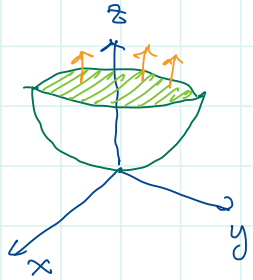
$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_S \langle \operatorname{rot} \vec{F}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_{\partial S} \langle \vec{F}, \vec{\tau} \rangle ds$$

$$= \int_{\partial S_1} \langle \vec{F}, \vec{\tau} \rangle ds = \int_{S_1} \langle \operatorname{rot} \vec{F}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_{S_1} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma$$

ROAD MAP 4 — **Gauss-Green aggiungendo i tappi**

→ Aggiungo ad S dei "tappi" in modo che venga il bordo di un certo solido V

→ Applico teo. div. in V



Nel nostro caso aggiungo S_1 come prima

Ora $\iiint_V \operatorname{div}\vec{E}\,dxdydz = \int_{\partial V} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma$ ①

$= \int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma + \int_{S_1} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma$

$\vec{n}$: la normale data era quella esterna ②

$\vec{n}$: la normale è $(0,0,1)$ ③

① $=0$ perché $\operatorname{div}\vec{E}=0$ (ma si poteva calcolare anche se $\operatorname{div}\neq 0$)

② è quello che cerchiamo, dunque

$② = -\int_{S_1} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma$

con normale $(0,0,1)$

che alla fine è quello di prima!

— o — o —

ANALISI 2 — LEZIONE 55

INTEGRALI IMPROPRI IN PIÙ VARIABILI

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy \qquad \iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

INT. PROPRI → insieme A (zona di integr.) limitato
→ funzione f (integranda) limitata

INT. IMPROPRI Se manca uno (o entrambi) degli ingredienti precedenti

Analisi 1

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$$

↑ improprio perché $\frac{1}{x}$ NON è limitata in $(0,1)$

$$\int_7^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$$

↑ improprio per colpa della zona di integr.

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$$

↑ improprio per 2 motivi
→ zona illimitata
→ $\frac{1}{x}$ non limitata

Analisi 2

$$\iint_A \frac{1}{x^4+y^4}\,dx\,dy$$

- Se $A = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 1\}$ allora è improprio perché la funzione non è limitata in un intorno dell'origine (si dice che l'integranda ha problemi in $(0,0)$ e questo è l'UNICO pbm. dell'integrale)
- Se $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \ge 1\}$ allora l'integranda non ha problemi, e l'integrale è improprio per colpa della zona di integrazione non limitata (l'integrale ha un unico pbm. all'infinito)
- Se $A = \mathbb{R}^2$ oppure A = primo quadrante, allora i pbm. ci sono entrambi (l'integrale ha 2 problemi)

Come si definisce un integrale improprio?

Analisi 1

$$\int_7^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int_7^A \frac{1}{x}\,dx$$

(solo pbm. all'infinito)

$$\int_0^7 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^7 \frac{1}{x}\,dx$$

(solo pbm. in $x=0$)

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \underbrace{\int_0^7 \frac{1}{x}\,dx + \int_7^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx}$$

il p.to di spezzamento NON è importante

e si studiano separatamente i due integrali con un pbm. solo

Analisi 2 Supponiamo intanto $f \geq 0$ nella zona di integrazione. Supponiamo che l'integrale abbia un problema solo (altrimenti si spezza in un numero opportuno di parti) Poi si procede in modo diverso a seconda del problema.

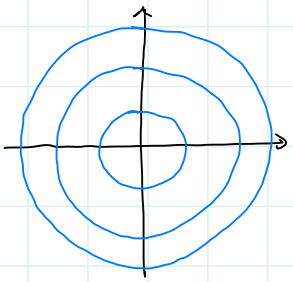
Esempio 1

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \underbrace{\frac{1}{x^2+y^2+5}}_{f(x,y)\geq 0}\,dx\,dy$$

(unico pbm. a $+\infty$)

$$= \lim_{R\to+\infty} \iint_{B(0,R)} \frac{1}{x^2+y^2+5}\,dx\,dy$$

palla con centro in $(0,0)$ e raggio R

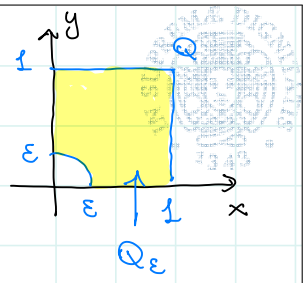


In alternativa posso usare i quadrati $Q_R := [-R,R]^2$

$$= \lim_{R\to+\infty} \iint_{Q_R} \frac{1}{\dots}\,dx\,dy = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} dx \int_{-R}^{R} dy\, \frac{1}{x^2+y^2+5}$$

In entrambi i casi sto facendo il limite di una funzione di R crescente, dunque il limite può fare $\ell \in \mathbb{R}$ oppure $+\infty$

Esempio 2 $Q = [0,1] \times [0,1]$



$$\iint_Q \frac{1}{x^2+y^2}\,dx\,dy$$ (unico pbm. in $(0,0)$)

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \underbrace{\iint_{Q_\varepsilon} \frac{1}{x^2+y^2}\,dx\,dy}$$

a ε fisso è un integrale proprio

In questo caso sto facendo il limite per $\varepsilon \to 0^+$ di una funzione decrescente di ε, quindi ancora una volta è $\ell \in \mathbb{R}$ oppure $+\infty$.

Oss. Anche in questo caso potevo usare "buchi quadrati" o "triangolari" e non cambiava nulla.

Se $f \leq 0$ nella zona di integrazione, allora è tutto uguale (si può pensare di "portare fuori un segno $-$" e si ricade nel caso $f \geq 0$.

Se f ha segno variabile, allora si pone

$$A_+ := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) \geq 0\}$$
$$A_- := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) \leq 0\}$$

Poi si studiano separatamente i due integrali

$$\iint_{A_+} f(x,y)\,dx\,dy \qquad \iint_{A_-} f(x,y)\,dx\,dy$$

e poi si traggono le conseguenze. Se il primo fa $+\infty$ ed il secondo fa $-\infty$, per CONVENZIONE si dice che l'integrale su A è INDETERMINATO.

Oss. Un integrale improprio ha 4 possibilità

$\ell \in \mathbb{R}$ $\quad$ $\pm\infty$ $\quad$ indeterminato.

Se $f \geq 0$, allora restano solo $\ell \in \mathbb{R}$ oppure $+\infty$

(necessariamente $\ell \geq 0$)

Studiare la convergenza di un integrale improprio = capire in quale caso ci troviamo.

— ∘ — ∘ —

Analisi 1 Ricordiamo i seguenti integrali fondamentali

$$\int_0^1 \frac{1}{x^a}\,dx = \begin{cases} \nearrow \text{converge se } a < 1 \\ \searrow \text{diverge a } +\infty \text{ se } a \geq 1 \end{cases}$$ } caso con pbm. in $x=0$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a}\,dx = \begin{cases} \nearrow \text{converge se } a > 1 \\ \searrow \text{diverge a } +\infty \text{ se } a \leq 1 \end{cases}$$ } caso con pbm. all'infinito

Gli a negli estremi possono un qualunque numero ≥ 0.

Esempio 1 $\displaystyle\iint_{B(0,1)} \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^a}\,dx\,dy$

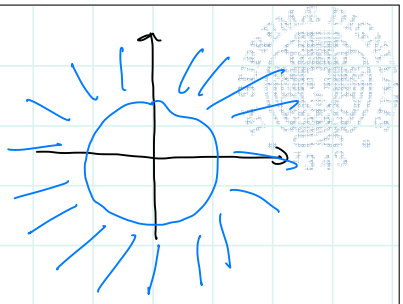
$$= \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} d\vartheta\, \frac{1}{\rho^a} \cdot \rho = \int_0^1 d\rho\, \frac{1}{\rho^{a-1}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\vartheta}_{2\pi} = 2\pi \int_0^1 \frac{d\rho}{\rho^{a-1}}$$

(ρ: jacobiano)

Questo è un integrale con pbm. in $\rho = 0$, che converge se e solo se $a - 1 < 1$, cioè se e solo se $a < 2$

$$\iint_{B(0,1)} \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^a}\,dx\,dy = \begin{cases} \nearrow \text{converge se } a < 2 \\ \searrow \text{diverge a } +\infty \text{ se } a \geq 2 \end{cases}$$

Esempio 2



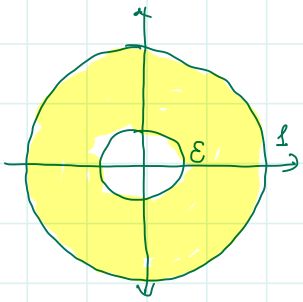
$$\iint_{\mathbb{R}^2 \setminus B(0,1)} \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^a}\,dx\,dy \quad \begin{cases} \nearrow \text{converge se } a > 2 \\ \searrow \text{diverge a } +\infty \text{ se } a \leq 2 \end{cases}$$

$$= \int_1^{+\infty} d\rho \int_0^{2\pi} d\theta\, \frac{1}{\rho^a} \cdot \rho = 2\pi \int_1^{+\infty} \frac{1}{\rho^{a-1}}\,d\rho$$

converge $\Leftrightarrow$ $a-1 > 1 \Leftrightarrow a > 2$

Formalmente nel 2° caso avrei dovuto integrare su corone circolari che escludevano l'origine

$$\iint_{B_\varepsilon} \frac{1}{(\sqrt{\dots})^a}\,dx\,dy$$



$$= \int_\varepsilon^1 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta\, \frac{1}{\rho^{a-1}}$$

$$= 2\pi \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\rho^{a-1}}\,d\rho$$ e quando $\varepsilon \to 0^+$ diventa proprio

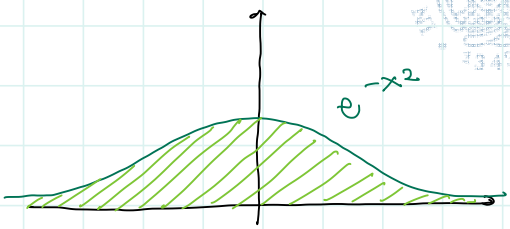
$$2\pi \int_0^1 \frac{1}{\rho^{a-1}}\,d\rho$$

— o — o —

ANALISI 2 — LEZIONE 56

INTEGRALE GAUSSIANO

Calcolare $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$



Indichiamo con I il valore dell'integrale.

Consideriamo l'integrale doppio improprio (per colpa della sola zona di integrazione)

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx\,dy$$

Proviamo a calcolarlo in due modi.

1° modo: coordinate cartesiane

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, \boxed{e^{-(x^2+y^2)}}$$

$= e^{-x^2} \cdot e^{-y^2}$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy$$

I $\quad$ I

$$= I^2$$

2° modo: coord. polari

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx\,dy = \int_0^{+\infty} d\rho \int_0^{2\pi} d\vartheta\, e^{-\rho^2} \cdot \rho$$

(ρ: Jacobiano)

$$= 2\pi \int_0^{+\infty} \rho e^{-\rho^2} d\rho$$

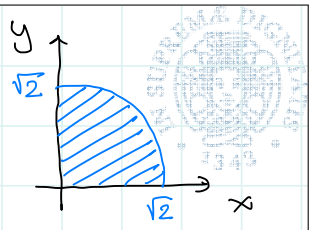
$$= \pi \left[-e^{-\rho^2} \right]_0^{+\infty} = \pi$$

Sarei dovuto fare $\int_0^R$ e poi mandare $R \to +\infty$

Ne segue che $I^2 = \pi$, cioè $I = \sqrt{\pi}$.

— o — o —

Esempio 1 $\iint_A \frac{x}{x^2+y^2}\,dx\,dy$



dove $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 2\}$

L'integrale è improprio perché $f(x,y)$ non è limitata in un intorno dell'origine (considero $f(t,t)$ e mando $t \to 0^+$)

Brutal mode $f(x,y) \sim \frac{\rho}{\rho^2} = \frac{1}{\rho}$ e quindi converge perché esponente < 2.

Formalmente, passiamo in coord. polari

$$\iint_A \frac{x}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_0^{\sqrt{2}} d\rho \int_0^{\pi/2} d\theta\ \frac{\rho\cos\theta}{\rho^2}\cdot \rho \qquad (J)$$

$$= \underbrace{\int_0^{\sqrt{2}} d\rho}_{\sqrt{2}} \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta}_{1} = \sqrt{2}, \text{ quindi converge}$$

Esempio 2 $\iint_A \frac{1}{x+y}\,dx\,dy$ con A come prima

Brutal mode: $f(x,y) \sim \frac{1}{\rho}$, quindi dovrebbe convergere.

Formalmente, in coord. polari diventa

$$\int_0^{\sqrt{2}} d\rho \int_0^{\pi/2} d\theta\ \frac{1}{\rho(\cos\theta+\sin\theta)}\cdot\rho = \int_0^{\sqrt{2}} d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}\,d\theta$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}\,d\theta$$

Adesso possiamo procedere in 2 modi, sostanzialmente equivalenti.

1° modo Osservare che l'integrale in $d\theta$ è un integrale PROPRIO, quindi viene un numero

Perché è un integrale proprio? Per il solito discorso di inizio corso: la funzione $g(\theta) = \cos\theta + \sin\theta$ ammette minimo per Weierstrass nell'intervallo $[0, \pi/2]$. Questo min. è il valore in un certo θ_0 e non può essere nullo perché $\sin\theta_0 \geq 0$ e $\cos\theta_0 \geq 0$, ma non possono essere contemporaneamente nulli.
[Volendo in questo caso il minimo si calcola pure :)]

2° modo Con il solito discorso si ottiene che

$$\cos\theta + \sin\theta \geq m > 0 \qquad \forall \theta \in [0, \pi/2]$$

e quindi

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos\theta + \sin\theta}\, d\theta \leq \int_0^{\pi/2} \frac{1}{m}\, d\theta = \frac{1}{m}\,\frac{\pi}{2}$$

↑ denom. più piccolo.

Esempio 3 $\displaystyle\iint_A \frac{xy}{x^4+y^4}\, dx\,dy$ con lo stesso A di prima

Brutal mode: $f(x,y) \sim \frac{1}{\rho^2}$, quindi DIVERGE (perché esponente 2 è il primo che va male)

In coord. polari diventa

$$\int_0^{\sqrt{2}} d\rho \int_0^{\pi/2} d\theta\, \frac{\rho^2 \cos\theta \sin\theta}{\rho^4(\cos^4\theta + \sin^4\theta)} \cdot \rho = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{\rho}\, d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\frac{\cos\theta\sin\theta}{\cos^4\theta + \sin^4\theta}}_{\varphi(\theta)}\, d\theta$$

Come prima osserviamo che

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\theta)\, d\theta = \alpha_0 > 0$$

(si tratta di un integrale proprio per il solito discorso denom. $\geq m > 0$)

$$= \alpha_0 \underbrace{\int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{\rho}\, d\rho}_{= +\infty \text{ per Analisi 1}}$$

Esempio 4 $\iint_A \frac{\arctan(xy)}{x^4+y^4}\,dx\,dy$ con lo stesso A di sempre

Brutal mode: $f(x,y) \sim \frac{xy}{x^4+y^4} \sim \frac{1}{\rho^2}$ ed è come prima.

Quando passiamo in coord. polari troviamo

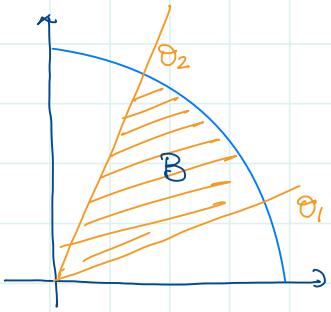
$$\int_0^{\sqrt{2}} d\rho \int_0^{\pi/2} d\vartheta\, \frac{\arctan(\rho^2 \cos\vartheta \sin\vartheta)}{\rho^4(\cos^4\vartheta+\sin^4\vartheta)} \cdot \rho$$

Problema: non è che posso semplificare i ρ !!!

Seconda idea: provo a scrivere $f(x,y) \geq$ qualcosa, sperando che l'integrale di qualcosa diverga a $+\infty$
Ora il numeratore si annulla sugli assi, quindi la ricerca del qualcosa non è ovvia

Terza idea: restringo la zona di integrazione in modo da restare lontani dagli assi

Fisso $0 < \vartheta_1 < \vartheta_2 < \frac{\pi}{2}$ e considero la zona



B: $0 \leq \rho \leq \sqrt{2}$ $\quad \vartheta_1 \leq \vartheta \leq \vartheta_2$. Ora

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy \geq \underbrace{\iint_B f(x,y)\,dx\,dy}_{\text{spero che diverga}}$$

Ora in B vale che $\sin\vartheta \cdot \cos\vartheta \geq m > 0$ per il solito motivo quindi

$$\frac{\arctan(\rho^2 \cos\vartheta \sin\vartheta)}{\rho^4(\cos^4\vartheta+\sin^4\vartheta)} \cdot \rho \geq \frac{\arctan(m\rho^2)}{2\rho^3}$$

num + piccolo, denom. + grande

A questo punto è fatta perché

$$\iint_B \frac{\arctan(\dots)}{\dots} \geq \int_0^{\sqrt{2}} d\rho \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \, \frac{\arctan(m\rho^2)}{2\rho^3}$$

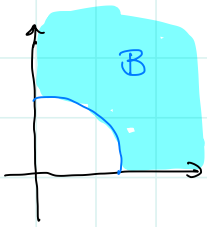
$$= (\theta_2 - \theta_1) \int_0^{\sqrt{2}} \frac{\arctan(m\rho^2)}{2\rho^3} \, d\rho$$

Diverge in quanto per $\rho \to 0$ si comporta come $\frac{m\rho^2}{2\rho^3} \sim \frac{m}{2} \frac{1}{\rho}$

Fatto generale: non solo si possono stimare gli integrali facendo disuguaglianze tra funzioni, ma anche considerando insiemi più grandi o più piccoli.

— o — o —

ANALISI 2 — LEZIONE 57



Esempio 1 $\iint_B \frac{xy^3}{x^7+y^7+1}\,dx\,dy$

$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2+y^2 \geq 1\}$

Brutal mode: $f(x,y) \sim \frac{\rho^4}{\rho^7} = \frac{1}{\rho^3}$, dunque CONVERGE $(3>2)$

Passando in coord. polari viene

$$\int_1^{+\infty} d\rho \int_0^{\pi/2} d\theta\ \frac{\rho^4 \cos\theta \sin^3\theta}{1+\rho^7(\cos^7\theta+\sin^7\theta)}\,\rho$$

Non potendo semplificare i ρ, facciamo disuguaglianze

$$\leq \int_1^{+\infty} d\rho \int_0^{\pi/2} d\theta\ \frac{\rho^4}{\rho^7(\cos^7\theta+\sin^7\theta)}\,\rho$$

↑ num + grande, denom. + piccolo

$\geq m > 0$ per il solito discorso

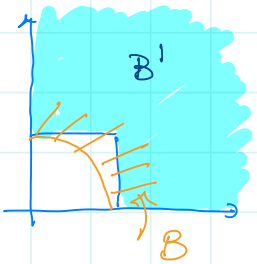
$$\leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{\rho^2}\,d\rho \int_0^{\pi/2} \frac{1}{m}\,d\theta$$

converge perché $2>1$ — $\frac{1}{m}\cdot\frac{\pi}{2}$

Quindi l'integrale converge.

Oss. Questo non ci dice a cosa converge! Se proprio calcolassimo, avremmo una stima dall'alto del valore a cui converge. In molte applicazioni però basta sapere che converge, senza trovare il valore.
Tra l'altro, una volta nota la convergenza, esistono algoritmi per trovare in maniera approssimata il valore.

Esempio 1 bis Lo stesso, al di fuori di un quadrato



Converge, basta osservare che

$$\iint_{B'} f(x,y)\,dx\,dy \leq \iint_B f(x,y)\,dx\,dy$$

Esempio 2 Sia Q il 1° quadrante. Studiare la convergenza di

$$\iint_Q \frac{1}{x^4+y^2+1}\,dx\,dy$$

(int. improprio con unico problema all'infinito)

Brutal mode: cosa metto al denominatore?

ρ^2 ⇝ diverge

ρ^4 ⇝ converge

SLOGAN: cambio variabili in modo da PAREGGIARE gli esponenti

Poniamo $x = u$ e $y = v^2$. La zona di integr. resta $u \geq 0$ e $v \geq 0$.

Occorre calcolare J:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2v \end{pmatrix} \qquad J = |\mathrm{Det}| = 2v$$

Quindi

$$\iint_Q \frac{1}{x^4+y^2+1}\,dx\,dy = \int_0^{+\infty} du \int_0^{+\infty} dv\, \frac{1}{u^4+v^4} \cdot 2v$$

Brutal mode: $\dfrac{2v}{u^4+v^4} \sim \dfrac{1}{\rho^3}$

L'integrale converge e si vede al solito modo

$$\int_0^{+\infty} d\rho \int_0^{\pi/2} d\vartheta\, \frac{2\rho \sin\vartheta}{\rho^4(\cos^4\vartheta + \sin^4\vartheta)}\,\rho \qquad \rho \uparrow J \text{ delle polari}$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\rho^2}\,d\rho \int_0^{\pi/2} \boxed{\frac{2\sin\vartheta}{\cos^4\vartheta + \sin^4\vartheta}}\,d\vartheta \qquad \leq \frac{2}{m} \cdot \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\rho^2}\,d\rho$$

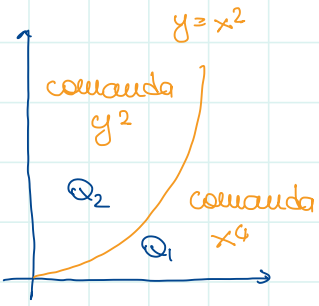
$\leq \dfrac{2}{m}$ ↑ solito discorso

che converge.

Approccio alternativo: $\dfrac{1}{x^4+y^2+1}$ $\qquad y^2 \geq x^4 \iff y \geq x^2$

Chi comanda al denominatore? Dipende dalle zone!

Studiamo separatamente l'integrale in Q_1 e Q_2



$$\iint_{Q_1} \frac{1}{x^4+y^2+1}\,dx\,dy \leq \iint \frac{1}{x^4+1}\,dx\,dy$$

↑ sacrifico y^2 perché conta meno

$$= \int_0^{+\infty} dx \int_0^{x^2} dy\, \frac{1}{x^4+1} = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\,dx = \text{converge per Analisi 1}$$

$\sim \frac{1}{x^2}$

$$\iint_{Q_2} \frac{1}{x^4+y^2+1}\,dx\,dy \leq \iint_{Q_2} \frac{1}{y^2+1}\,dx\,dy$$

↑ sacrifico x^4

$$= \int_0^{+\infty} dy \int_0^{\sqrt{y}} dx\, \frac{1}{y^2+1} = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{y}}{y^2+1}\,dy = \text{converge}$$

↑ normale asse y

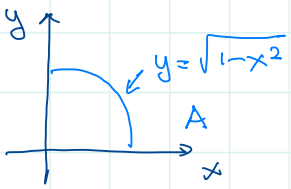
$\sim \frac{1}{y^{3/2}}$ e $\frac{3}{2} > 1$

Esempio 2-bis Lo stesso con zona di integrazione

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2+y^2 \geq 1\}$$

Quando pongo $x = u$ e $y = v^2$, la nuova zona di integrazione diventa

$$A' = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u \geq 0,\ v \geq 0,\ u^2+v^4 \geq 1\}$$



Ma ancora una volta posso sostituire con un insieme A'' che contiene A' e "facile meglio"

Attenzione! Quando si fanno i cambi di variabili negli integrali, occorre che il cambio di variabili sia iniettivo, altrimenti alcune parti contano doppio !!

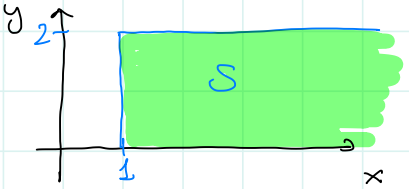
Esempio $\int_1^4 \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$ Pongo $x = y^2$ da cui $dx = 2y\,dy$

$$= \int_1^2 \frac{\sin y}{y} \cdot 2y\,dy$$ I nuovi estremi sono 1 e 2

Se avessi imposto $1 \le x \le 4 \rightsquigarrow 1 \le y^2 \le 4 \rightsquigarrow$ $y \in [1,2]$ e $y \in [-2,-1]$

Considero solo y^2 definita per $y \in [1,2]$, così il cambio di variabili è iniettivo.

Esempio 3 $\iint_S \frac{xy}{x^3+y^3}\,dx\,dy$



dove $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge 1 \text{ e } 0 \le y \le 2\}$

Brutal mode: $f(x,y) \sim \frac{1}{\rho}$ $\rightsquigarrow$ all'infinito diverge alla grande

Infatti converge ☺

$$\iint_S \frac{xy}{x^3+y^3}\,dx\,dy = \int_1^{+\infty} dx \int_0^2 dy\, \frac{xy}{x^3+y^3}$$

$$= \int_1^{+\infty} x\,dx \int_0^2 dy\, \frac{y}{x^3+y^3}$$ 😐

Torniamo indietro (numeratore più grande, denominatore più piccolo ↓)

$$\int_1^{+\infty} dx \int_0^2 dy\, \frac{xy}{x^3+y^3} \le \int_1^{+\infty} dx \int_0^2 dy\, \frac{2x}{x^3} = 2 \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx}_{\text{converge}} \underbrace{\int_0^2 dy}_{=2}$$

— o — o —

ANALISI 2 — LEZIONE 58

Esempio 1 $B = B(0,1)$ $\iiint_B \frac{xy}{(x^2+y^2+z^2)^2}\,dx\,dy\,dz$

Brutal mode: $f(x,y,z) \sim \frac{\rho^2}{\rho^4} = \frac{1}{\rho^2}$ quindi converge perché $2<3$

Oss 1: l'unico polo dell'integrale è in $(0,0,0)$

Oss 2: il segno non è costante, quindi dovrei spezzare in varie zone a seconda del segno di xy

Per simmetria basta studiare per $x \geq 0$ e $y \geq 0$ $\rightsquigarrow B_+$

Su B_+ usiamo coord. sferiche

$$\iiint_{B_+} f\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 d\rho \int_0^{\pi/2} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\, \frac{\rho^2 \cos^2\varphi \cos\theta \sin\theta}{\rho^4}\,\rho^2\cos\varphi$$

$$= \int_0^1 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\, \cos\theta\sin\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi\,d\varphi$$

Quindi converge e volendo si calcola il valore esatto

A questo punto l'integrale su tutto B fa 0 per simmetria

Achtung! Non posso fare compensazioni prima di aver stabilito la convergenza (potrebbe venire $+\infty - \infty$)

Esempio 1-bis Stabilire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ converge

$$\iiint_B \frac{xy}{(x^2+y^2+z^2)^a}\,dx\,dy\,dz$$

Brutal mode: $f \sim \frac{\rho^2}{\rho^{2a}} = \frac{1}{\rho^{2a-2}}$ che converge $\Leftrightarrow 2a-2<3$

$\Leftrightarrow a < \frac{5}{2}$

Rigorosamente occorre dimostrare 2 cose (ENTRAMBE)

→ per $a < \frac{5}{2}$ converge

→ per $a \geq \frac{5}{2}$ non converge (in questo caso è indeterminato)

$\boxed{a < \frac{5}{2}}$ B_+ come prima ...

$$\iiint_{B_+} \dots = \int_0^1 \frac{1}{\rho^{2a-4}} d\rho \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi \, d\varphi$$

$2a-4<1$, $2a<5$, $a<\frac{5}{2}$

Numero positivo

Quindi per $a < \frac{5}{2}$ converge su B_+ ma fa 0 su B

$\boxed{a > \frac{5}{2}}$ Con lo stesso conto otteniamo $\iiint_{B_+} \dots = +\infty$ e quindi $\iiint_B$ è indeterminato.

Esempio 2 $\displaystyle\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{x^8 |y|^a}{(x^2+y^2+z^2)^6} dx\,dy\,dz$

Oss 1 $f \geq 0$ ovunque, quindi ok con i segni

Oss. 2 Potenzialmente ci sono 2 problemi: nell'origine e all'infinito

Dividiamo l'integrale in 2:

B = solita palla A = esterno della palla

Brutale: $f \sim \frac{\rho^{8+a}}{\rho^{12}} = \frac{1}{\rho^{4-a}}$

- se $a > 1$ converge in B e diverge in A
- se $a < 1$ diverge in B e converge in A
- se $a = 1$ allora diverge ovunque

La dimostrazione è come prima: la parte trigonometrica è un numero positivo, quindi decide la potenza di ρ.

Esempio 2-bis $\displaystyle\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\arctan(x^8|y|^a)}{(x^2+y^2+z^2)^6}\,dx\,dy\,dz$

Oss 1 e 2 sono come sopra

Brutal mode: $f \sim \dfrac{\rho^{8+a}}{\rho^{12}}$ ⇝ questa è corretta solo vicino a 0

quindi come prima $\iiint_B$ converge se $a > 1$, diverge se $a \le 1$

Per il resto all'infinito $f \sim \dfrac{\frac{\pi}{2}}{\rho^{12}}$ e quindi ancora resto in A

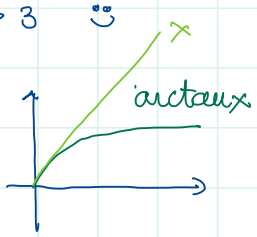
1° fatto $\displaystyle\iiint_A \frac{\arctan(x^8|y|^a)}{(x^2+y^2+z^2)^6}\,dx\,dy\,dz$ converge $\forall a \in \mathbb{R}$

A = esterno della palla

Infatti $\displaystyle\iiint_A \ldots \le \frac{\pi}{2}\iiint_A \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^6}\,dx\,dy\,dz$

che converge perché $12 > 3$ ☺

2° fatto $\iiint_B \ldots$ converge se $a > 1$

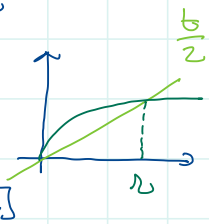


Infatti uso che $\arctan(t) \le t$ per ogni $t \ge 0$

e ottengo che

$$\iiint_B \ldots \le \iiint_B \frac{x^8|y|^a}{(\ldots)^6}\,dx\,dy\,dz = \text{studiato prima in coord. sferiche}$$

3° fatto $\iiint_B \ldots$ diverge a $+\infty$ se $a \le 1$



1° modo Osservo che $\arctan t \ge \frac{1}{2}t$ per ogni $t \in [0, 2]$

Ma allora $x^8|y|^a \le r$ in un intorno dell'origine $B(0, r_0)$

Ma allora

$$\iiint_B \ldots \ge \frac{1}{2}\iiint_{B(0,r_0)} \frac{x^8|y|^a}{(\ldots)^6}\,dx\,dy\,dz = \text{studiato prima e diverge per } a \le 1$$

2° modo Uso direttamente le sferiche

$$\iiint_B \ldots = \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \; \frac{\arctan(\rho^{8+a}\cos^8\varphi\cos^8\theta\cos^a\varphi\,|\sin\theta|^q)}{\rho^{12}} \cdot \rho^2\cos\varphi\,d\varphi$$

$$\geq \int_0^1 d\rho \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \; \frac{\arctan(\rho^{8+q}(\ldots))}{\rho^{10}}\cos\varphi\,d\varphi \qquad (\geq m > 0)$$

↑ Queste scelte lasciano cose e sino lontani da 0

↑ Queste scelte lasciano cosφ lontano da 0

$\geq m > 0$ per il SOLITO DISCORSO

$$\geq \int_0^1 \frac{\arctan(m\rho^{8+a})}{\rho^{10}}\,d\rho \cdot \left[m\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi\right]$$

numero positivo

Diverge per l'analisi 1 essendo $\sim \frac{m\rho^{8+q}}{\rho^{10}} = \frac{m}{\rho^{2-a}}$

per $a \leq 1$ DIVERGE

Esempio 2-ter $f(x,y,z) = \dfrac{\arctan(x^8|y|^a)}{(x^2+y^2+z^2)^6}$

Domanda: → per quali valori di a è limitata in B?
(e quindi l'integrale in B NON è improprio)
→ per quali valori di a ammette limite nell'origine

Risposte: limitata $\iff a \geq 4$
ammette limite $\iff a > 4$

$$f \sim \frac{\rho^{8+a}}{\rho^{12}} = \frac{\rho^a}{\rho^4}$$

Entrambe si dimostrano passando in coord. sferiche.

$\iiint_B = +\infty$ $\iiint_B < +\infty$ ↑ int. non è improprio (lim. N.E.)

↑ La funzione → 0 nell'origine e $\iiint_B$ non è improprio quindi converge

ANALISI 2 — LEZIONE 59

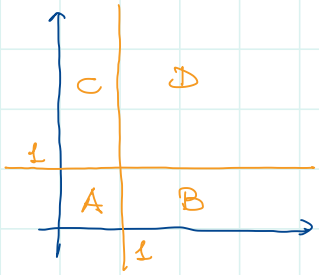
Esempio 1 Sia Q il primo quadrante in $\mathbb{R}^2$.
Studiare la convergenza di

$$\iint_Q \frac{1}{1+x^2+y^2+x^2y^2}\,dx\,dy$$

Oss. $f \geq 0$ e l'unico pbm. è all'infinito

Brutal mode: $f \sim \frac{1}{\rho^4}$ ma sembra losco in quanto x^2y^2 è nullo sugli assi, e quindi la stima è MOLTO brutale

Oss. Se non ci fosse x^2y^2 al denominatore, il resto non basta per avere convergenza.



Dividiamo Q in 4 zone.

- In A l'integrale è PROPRIO, quindi NO PROBLEM
- In D abbiamo buone speranze, poiché x^2y^2 sta lontano da 0. E infatti

$$\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2+x^2y^2}\,dx\,dy \leq \iint_D \frac{1}{x^2y^2}\,dx\,dy$$
$$= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx \int_1^{+\infty} \frac{1}{y^2}\,dy = \text{converge (a 1)} \;\ddot\smile$$

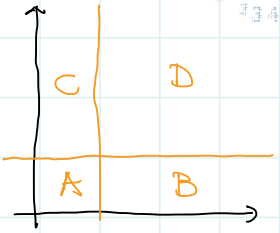
- In B otteniamo

$$\iint_B \frac{1}{1+x^2+y^2+x^2y^2}\,dx\,dy \leq \iint_B \frac{1}{x^2}\,dx\,dy = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx \int_0^{1} dy$$
$$= \text{converge} \;\ddot\smile$$

- In C stessa cosa salvando y^2 al denominatore $\ddot\smile$

Oss. Posso sostituire x^2 e y^2 singoli al denominatore con esponenti > 1

Esempio 2 $\iint_Q \frac{1}{1+x+y+x^2y^2}\,dx\,dy$



Le zone A e D funzionano come prima.
Vediamo la zona B (la zona C è analoga)

$$\iint_B \frac{1}{1+x+y+x^2y^2}\,dx\,dy \leq \iint_B \frac{1}{x+x^2y^2}\,dx\,dy$$

↑ da solo non basta, ma insieme all'altro fanno sì

$$= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx \int_0^1 \frac{1}{1+xy^2}\,dy$$

Qui si sa fare la primitiva rispetto a y

$$= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx \left[\frac{1}{\sqrt{x}}\arctan(\sqrt{x}y)\right]_{y=0}^{y=1}$$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{\arctan(\sqrt{x})}{x\sqrt{x}}\,dx$$

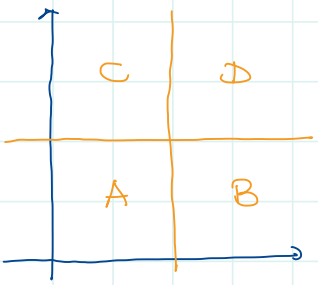
$$\leq \frac{\pi}{2}\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\,dx = \text{converge ☺}$$

Fatto di analisi 1: la primitiva di $\frac{1}{1+ay^2}$ è $\frac{1}{\sqrt{a}}\arctan(\sqrt{a}y)$ per $a>0$

Esempio 3 $\iint_Q \frac{1}{1+x^2y^2}\,dx\,dy$

Brutal mode: ancora una volta $f \sim \frac{1}{\rho^4}$ ma in maniera LOSCA

Zona A e zona D come sempre
Vediamo la zona B



1° modo Con la primitiva

$$\iint_B \frac{1}{1+x^2y^2}\,dx\,dy = \int_1^{+\infty} dx \int_0^1 dy\, \frac{1}{1+x^2y^2}$$

$$= \int_1^{+\infty} dx \left[\frac{1}{x}\arctan(xy)\right]_{y=0}^{y=1}$$

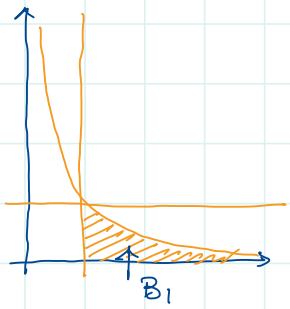
$$= \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x}\,dx = +\infty$$

$\sim \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{x}$

per confronto asintotico con $\frac{1}{x}$

2° modo Introduciamo la zona

$$B_1 := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 1,\ 0\leq y\leq \tfrac{1}{x}\}$$



$$\iint_{B_1} \frac{1}{1+x^2y^2}\,dx\,dy \geq \iint_{B_1} \frac{1}{2}\,dx\,dy$$

↑ nella zona B_1 abbiamo che $x^2y^2\leq 1$

$$= \frac{1}{2}\iint_{B_1} dx\,dy = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} dx \int_0^{\frac{1}{x}} dy = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$$

Esempio 4 $\iint_A \frac{x}{x^3+y^3}\,dx\,dy$

1° Caso A = 1° quadrante

Brutale: $f \sim \frac{\rho}{\rho^3} = \frac{1}{\rho^2}$ va DIVERGE ↑ sia per il pbm in 0 sia all'infinito

Qui funziona le coord. polari

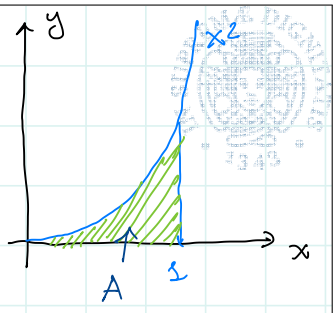
$$\iint_A \frac{x}{x^3+y^3}\,dx\,dy = \int_0^{+\infty} d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta\, \frac{\rho\cos\vartheta}{\rho^3(\cos^3\vartheta+\sin^3\vartheta)}\,\rho$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\rho}\,d\rho \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\vartheta}{\cos^3\vartheta+\sin^3\vartheta}\,d\vartheta$$

↑ Diverge per 2 motivi

integrale di funzione continua e positiva, quindi è numero $a_0>0$

2° caso $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^2\}$



Brutale: $f \sim \frac{1}{\rho^2}$, ma l'insieme è molto stretto vicino all'origine

Proviamo a sperare nella convergenza

$$\iint_A \frac{x}{x^3+y^3}\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} dy\, \frac{x}{x^3+y^3} \le \int_0^1 dx \int_0^{x^2} dy\, \frac{x}{x^3}$$

volendo potrei fare la primitiva

$$= \int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx \int_0^{x^2} dy = \int_0^1 dx = 1, \text{ quindi converge } \ddot{\smile}$$

2° caso – bis A come sopra $\iint_A \frac{x}{x^a+y^a}\,dx\,dy$ Quando converge?

Come prima

$$\iint_A \frac{x}{x^a+y^a}\,dx\,dy \le \int_0^1 dx \int_0^{x^2} dy\, \frac{x}{x^a} = \int_0^1 \frac{1}{x^{a-1}} \underbrace{\int_0^{x^2} dy}_{x^2} = \int_0^1 \frac{1}{x^{a-3}}\,dx$$

↑ sacrifico

e questo converge se e solo se $a-3<1$, cioè $a<4$.

Quindi ho dimostrato che per $a<4$ l'integrale dato converge.
RESTA da dimostrare che per $a \ge 4$ diverge.
Per $a \ge 4$ ho dimostrato che l'integrale dato è $\le +\infty$ ☹

$$\iint_A \frac{x}{x^a+y^a}\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} dy\, \frac{x}{x^a+y^a} \ge \int_0^1 dx \int_0^{x^2} \frac{x}{x^a+x^{2a}}\,dy$$

↑ metto $y = x^2$

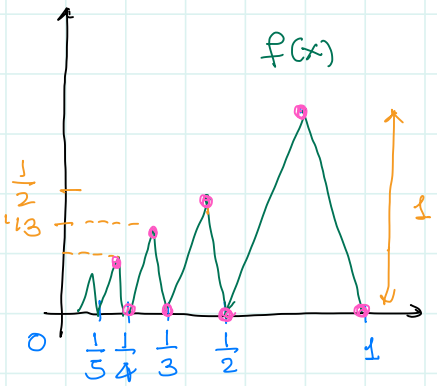
$$= \int_0^1 \frac{x}{x^a+x^{2a}} \cdot x^2\,dx$$ e questo diverge per $a \ge 4$ perché si comporta come $\frac{x^3}{x^a}$. VOLENDO è $\ge \frac{x^3}{2x^a}$

ANALISI 2 — LEZIONE 60

Esempi di curve continue di lunghezza infinita

Esempio 1 Si tratta di una curva cartesiana che è grafico di una funzione come in figura

Il triangolo k-esimo ha come base l'intervallo $\left[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$ e come altezza $\frac{1}{k}$



Il disegno è il grafico di una $f : [0,1] \to [0,1]$ continua.
La curva ha come parametrizzazione

$$\gamma(t) := (t, f(t)) \quad \text{con } t \in [0,1]$$

Dico che lunga $(\gamma) = +\infty$. Devo dimostrare che la posso approssimare con una spezzata lunga a piacere.

Come spezzata uso quella che passa per i vertici dei triangoli
Osservo che i due lati obliqui del triangolo k-esimo hanno lunghezza $\geq \frac{1}{k}$ per il teo. di Pitagora (ipotenusa $\geq$ cateto).

Quindi la lunga di una spezzata che "segue" i primi n triangoli è

$$2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

e tende a $+\infty$ quando $n \to +\infty$ perché la serie armonica diverge.

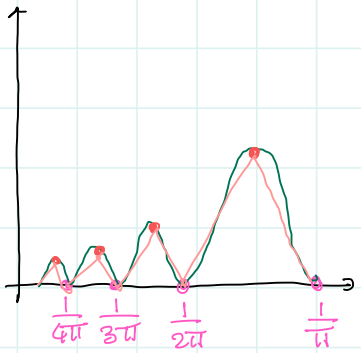
Esempio 2 $\gamma(t) = (t, \underbrace{t \sin^2 \frac{1}{t}}_{f(t)})$ con $t \in [0,1]$

Capiamo come è fatta $f(t)$.
Si annulla, oltre che per $t=0$, quando $\frac{1}{t} = k\pi$, cioè per $t = \frac{1}{k\pi}$

Come prima voglio costruire una spezzata approssimante congiungendo i punti di annullamento con i punti in mezzo in cui $\sin^2 \frac{1}{t} = 1$, cioè

$$t = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

cioè $t = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi}$



Cosa posso dire della lunga. della spezzata?
I lati obliqui sono $\geq$ dell'altezza dei corrispondenti triangoli.
Le altezze sono $f(t)$ con t scritto sopra. Poiché $\sin$ vale uno in quei punti, le altezze sono proprio t, cioè

$$\frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi}$$

Se mi fermo dopo n triangoli (cioè $2n$ segmenti) ottengo

$$\text{lunga. spezz.} \geq 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi}$$

e ancora una volta questo diverge quando $n \to +\infty$.

Essendo lunga $(\gamma) = \sup$ lunga spezzate, questa fa $+\infty$

Esercizio (hard!) Cercare di capire per quali $a > 0$ posso ottenere lo stesso fenomeno con il grafico di

$$t^a \sin^2 \frac{1}{t}$$

DIMOSTRAZIONE TEO DIV. NEL CASO DEI RETTANGOLI

$$\iint_R \operatorname{div} E \, dx\,dy = \int_{\partial R} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds = \int_\gamma A\,dy - B\,dx$$

↑ curva che percorre ∂R lasciando R a sinistra

La seconda uguaglianza l'abbiamo dim. a suo tempo, ma solo per i rettangoli (è sostanzialmente la def. di $\vec{n}$).

Dimostriamo che $\iint_R (Ax+By)\,dx\,dy = \int_\gamma A\,dy - B\,dx$

anzi dimostriamo separatamente che

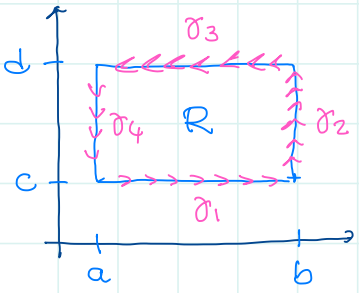
$$\iint_R Ax\,dx\,dy = \int_\gamma A\,dy \qquad \iint_R By\,dx\,dy = -\int_\gamma B\,dx$$

Dimostriamo la seconda $\quad R = [a,b] \times [c,d]$

$$\iint_R By(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_a^b dx \int_c^d dy\, By(x,y)$$

↑ devo fare la primitiva in y!



$$= \int_a^b dx \left[B(x,y) \right]_{y=c}^{y=d} = \int_a^b dx \{ B(x,d) - B(x,c) \}$$

Adesso risolviamo $\int_\gamma B\,dx$. Chi è γ? Sono 4 curve

- $\gamma_1(t) = (t,c)$ con $a \le t \le b$. Quindi

$$\int_{\gamma_1} B\,dx = \int_a^b B(t,c)\cdot 1\,dt = \int_a^b B(t,c)\,dt$$

($x(t)$, $y(t)$, $\dot{x}(t)$)

- $\gamma_2(t) = (b,t)$ con $c \le t \le d$. Quindi

$$\int_{\gamma_2} B\,dx = \int_c^d B(b,t)\cdot 0\,dt = 0$$

($\dot{x}(t)$)

- Per lo stesso motivo $\int_{\gamma_4} B\,dx = 0$.

- $\gamma_3(t) = (t,d)$ con $a \le t \le b$ percorsa al CONTRARIO

$$\int_{\gamma_3} B\,dx = -\int_a^b B(t,d)\cdot 1\,dt = -\int_a^b B(t,d)\,dt$$

(percorsa al contrario)

Sommando i 4 pezzi ottengo esattamente quello che serviva.

Quando devo dimostrare la parte con la A, parto con

$$\iint_R A_x\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_a^b dx\, A_x(x,y) = \int_c^d dy\,[A(x,y)]_{x=a}^{x=b}$$

(devo fare la primitiva in x)

$$= \int_c^d \{A(b,y) - A(a,y)\}\,dy$$

Facendo il conto con le 4 curve, questa volta i lati orizzontali hanno contribuito nullo, mentre i 2 lati verticali mi danno quello che serve.

Oss. Il caso con solo B si generalizza facilmente a insiemi normali rispetto all'asse x. Per questi insiemi invece il caso con A richiede un'idea in più (non è detto che le sezioni a y fisso siano dei segmenti).

— o — o —