

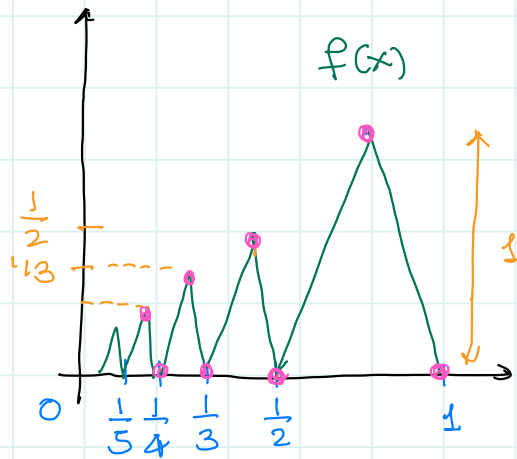
Esempi di curve continue di lunghezza infinita

Esempio 1 Si tratta di una curva continua che è grafico di una funzione come in figura

Il triangolo k -esimo ha come base l'intervallo

$$\left[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k} \right]$$

e come altezza $\frac{1}{k}$



Il disegno è il grafico di una $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continua.

La curva ha come parametrizzazione

$$\gamma(t) := (t, f(t)) \quad \text{con } t \in [0, 1]$$

Dico che $\text{lung}(\gamma) = +\infty$. Devo dimostrare che la posso approssimare con una spezzata lunga a piacere.

Come spezzata uso quella che passa per i vertici dei triangoli

Osservo che i due lati obliqui del triangolo k -esimo hanno lunghezza $\geq \frac{1}{k}$ per il teo. di Pitagora (ipotenusa $\geq$ cateto).

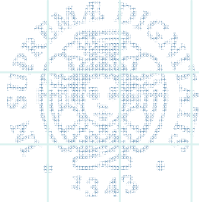
Quindi la lunghezza di una spezzata che "segue" i vertici n triangoli è

$$2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

e tende a $+\infty$ quando $n \rightarrow \infty$ perché la serie armonica diverge.

Esempio 2

$$\gamma(t) = (t, \underbrace{t \sin^2 \frac{1}{t}}_{f(t)}) \quad \text{con } t \in [0, 1]$$



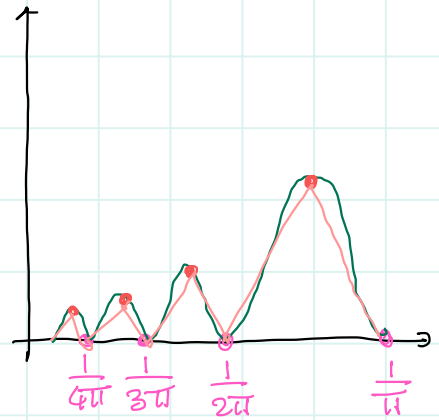
Capiamo come è fatta $f(t)$.

Si annulla, oltre che per $t=0$, quando $\frac{1}{t} = k\pi$, cioè per $t = \frac{1}{k\pi}$

Come prima voglio costruire una spezzata approssimante congiungendo i punti di annullamento con i punti in cui $\sin^2 \frac{1}{t} = 1$, cioè

$$t = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\text{cioè } t = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi}$$



Cosa posso dire della lung. della spezzata?

I lati obliqui sono $\geq$ dell'altezza dei corrispondenti triangoli.

Le altezze sono $f(t)$ con t scritto sopra. Poiché si vale uno su quei punti, le altezze sono proprio t , cioè

$$\frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi}$$

Se mi fermo dopo n triangoli (cioè $2n$ segmenti) ottengo

$$\text{lung. spez.} \geq 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi}$$

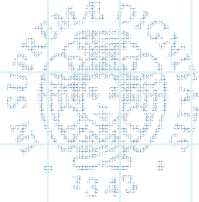
e ancora una volta questo diverge quando $n \rightarrow +\infty$.

Essendo $\text{lung.}(\gamma) = \sup \text{lung. spezzate}$, questa fa $+\infty$

Esercizio (hard!) Cercare di capire per quali $a \geq 0$ posso ottenere lo stesso fenomeno con il grafico di

$$t^a \sin^2 \frac{1}{t}$$

DIMOSTRAZIONE TEO D'IN. NEL CASO DEI RETTANGOLI



$$\iint_R \operatorname{div} E \, dx \, dy = \int_{\partial R} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds = \int_{\partial R} A \, dy - B \, dx$$

↑
curva che percorre ∂R
lasciando R a sinistra

La seconda uguaglianza l'abbiamo dim. a suo tempo, non solo per i rettangoli (è sostanzialmente la def. di $\vec{n}$).

Dimostriamo che
$$\iint_R (A_x + B_y) \, dx \, dy = \int_{\partial R} A \, dy - B \, dx$$

anzi dimostriamo separatamente che

$$\iint_R A_x \, dx \, dy = \int_{\partial R} A \, dy$$

$$\iint_R B_y \, dx \, dy = - \int_{\partial R} B \, dx$$

Dimostriamo la seconda

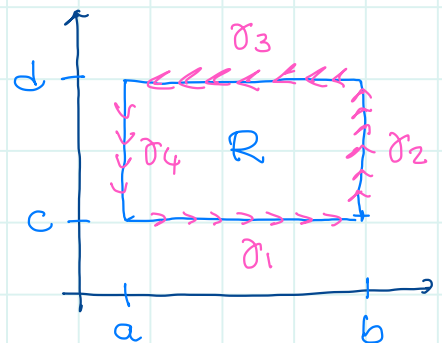
$$R = [a, b] \times [c, d]$$

$$\iint_R B_y(x, y) \, dx \, dy$$

$$= \int_a^b dx \int_c^d dy B_y(x, y)$$

↑
devo fare la primitiva in y !

$$= \int_a^b dx \left[B(x, y) \right]_{y=c}^{y=d} = \int_a^b dx \{ B(x, d) - B(x, c) \}$$



Adesso riscriviamo $\int_{\partial R} B \, dx$. Chi è σ ? Sono 4 curve

• $\sigma_{\pm}(t) = (t, c)$ con $a \leq t \leq b$. Quindi

$$\int_{\sigma_1} B \, dx = \int_a^b B(t, c) \, dt = \int_a^b B(x(t), y(t)) \dot{x}(t) \, dt$$

- $\gamma_2(t) = (b, t)$ con $c \leq t \leq d$. Quindi

$$\int_{\gamma_2} B dx = \int_c^d B(b, t) \underset{\uparrow \dot{x}(t)}{0} dt = 0$$

- Per lo stesso motivo $\int_{\gamma_4} B dx = 0$.

- $\gamma_3(t) = (t, d)$ con $a \leq t \leq b$ percorsa al CONTRARIO

$$\int_{\gamma_3} B dx = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{percorsa} \\ \text{al contrario}}}{-\int_a^b} B(t, d) dt = - \int_a^b B(t, d) dt$$

Sommando i 4 pezzi ottengo esattamente quello che serve.

Quando devo dimostrare la parte con la A, parto con

$$\begin{aligned} \iint_R A_x dx dy &= \int_c^d dy \int_a^b dx A_x(x, y) &= \int_c^d dy [A(x, y)]_{x=a}^{x=b} \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{devo fare la} \\ &\quad \text{primitiva in } x \\ &= \int_c^d \{ A(b, y) - A(a, y) \} dy \end{aligned}$$

Facendo il conto con le 4 curve, questa volta i dati orizzontali hanno contribuito nullo, mentre i 2 dati verticali mi danno quello che serve.

[Oss.] Il caso con solo B si generalizza facilmente a insiemini orizzontali rispetto all'asse x . Per questi insiemini invece il caso con A richiede un'idea un po' più (non è detto che le sezioni a y fisso siano dei seguenti).

— o — o —