



Esempio 1 Sia Q il primo quadrante in $\mathbb{R}^2$.

Studiamo la convergenza di

$$\iint_Q \frac{1}{1+x^2+y^2+x^2y^2} dx dy$$

Oss. $f \geq 0$ e l'unico p.b.m. è all'infinito

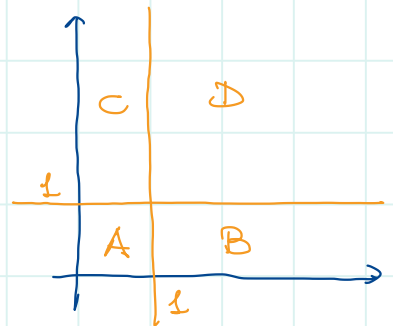
Brutal mode: $f \sim \frac{1}{x^2y^2}$ ma sembra LOCO in quanto x^2y^2 è nullo sugli assi, e quindi la stima è MOLTO brutale

Oss. Se non ci fosse x^2y^2 al denominatore, il resto non basta per avere convergenza.

Dividiamo Q in 4 zone.

• In A l'integrale è PROPRIO, quindi NO PROBLEM

• In D abbiamo buone speranze, poiché x^2y^2 sta lontano da 0. E infatti



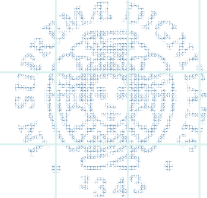
$$\begin{aligned} \iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2+x^2y^2} dx dy &\leq \iint_D \frac{1}{x^2y^2} dx dy \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \int_1^{+\infty} \frac{1}{y^2} dy = \text{converge} \quad (\alpha \neq 1) \quad \ddot{\smile} \end{aligned}$$

• In B otteniamo

$$\begin{aligned} \iint_B \frac{1}{1+x^2+y^2+x^2y^2} dx dy &\leq \iint_B \frac{1}{x^2} dx dy = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \int_0^1 dy \\ &= \text{converge} \quad \ddot{\smile} \end{aligned}$$

• In C stessa cosa salvando y^2 al denominatore $\ddot{\smile}$

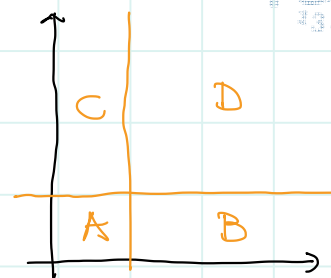
Oss. Potrei sostituire x^2 e y^2 singoli al denominatore con esponenti > 1



Esempio 2 $\iint_{\mathbb{Q}} \frac{1}{1+x+xy+x^2y^2} dx dy$

Le zone A e D funzionano come prima.

Vediamo la zona B (la zona C è analoga)



$$\iint_B \frac{1}{1+x+xy+x^2y^2} dx dy \leq \iint_B \frac{1}{x+x^2y^2} dx dy$$

da solo non basta, ma
insieme all'altra parte si

$$= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx \int_0^1 \frac{1}{1+xy^2} dy$$

Qui si sa fare la
primitiva rispetto a y

$$= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx \left[\frac{1}{\sqrt{x}} \arctan(\sqrt{x}y) \right]_{y=0}^{y=1}$$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{\arctan(\sqrt{x})}{x\sqrt{x}} dx$$

$$\leq \frac{\pi}{2} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}} dx = \text{converge} \quad \ddot{\smile}$$

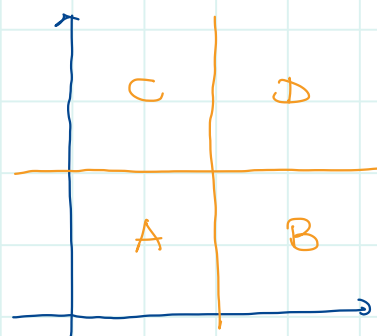
Fatto di analisi 1 : la primitiva di $\frac{1}{1+ay^2}$ è $\frac{1}{\sqrt{a}} \arctan(\sqrt{a}y)$
per $a > 0$

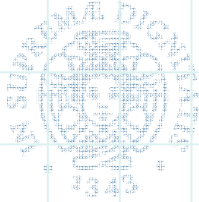
Esempio 3 $\iint_{\mathbb{Q}} \frac{1}{1+x^2y^2} dx dy$

Brutal mode: ancora una volta $f \sim \frac{1}{\rho^4}$ ma in maniera LOSCA

Zona A e zona D come sempre

Vediamo la zona B





1° modo Con la primitiva

$$\begin{aligned} \iint_B \frac{1}{1+x^2y^2} dx dy &= \int_1^{+\infty} dx \int_0^1 dy \frac{1}{1+x^2y^2} \\ &= \int_1^{+\infty} dx \left[\frac{1}{x} \arctan(xy) \right]_{y=0}^{y=1} \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x} dx = +\infty \quad \text{per confronto asintotico con } \frac{1}{x} \\ &\quad \sim \frac{\pi}{2} \frac{1}{x} \end{aligned}$$

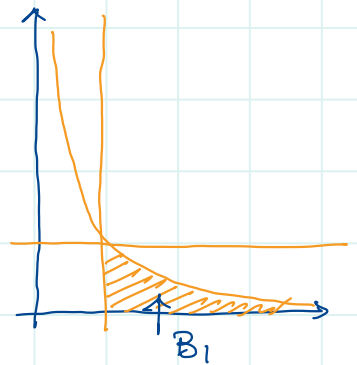
2° modo Introduciamo la zona

$$B_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\}$$

$$\iint_{B_1} \frac{1}{1+x^2y^2} dx dy \geq \iint_{B_1} \frac{1}{2} dx dy$$

nella zona B_1 abbiamo che
 $x^2y^2 \leq 1$

$$= \frac{1}{2} \iint_{B_1} dx dy = \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} dx \int_0^{\frac{1}{x}} dy = \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$$



Esempio 4 $\iint_A \frac{x}{x^3+y^3} dx dy$

1° Caso $A = 1^o$ quadrante Brutale: $f \sim \frac{p}{p^3} = \frac{1}{p^2}$ **no DIVERGE**
 sia per il p.m. in 0
 sia all'infinito

Qui funzionano le coord. polari

$$\begin{aligned} \iint_A \frac{x}{x^3+y^3} dx dy &= \int_0^{+\infty} dp \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{p \cos \theta}{p^3 (\cos^3 \theta + \sin^3 \theta)} p d\theta \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{p} dp \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \theta}{\cos^3 \theta + \sin^3 \theta} d\theta \end{aligned}$$

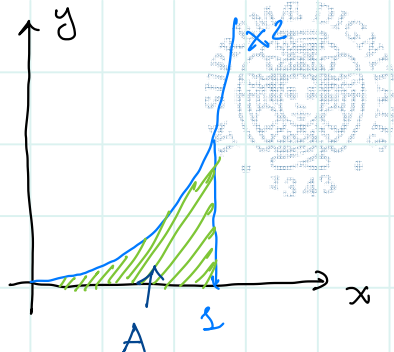
↑
Diverge per 2 motivi

integrale di funzione continua e positiva, quindi è numero $a_0 > 0$

2° caso

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$$

Brutale: $f \sim \frac{1}{p^2}$, ma l'origine è molto stretto vicino all'origine



Proviamo a sperare nella convergenza

$$\iint_A \frac{x}{x^3+y^3} dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} dy \frac{x}{x^3+y^3} \leq \int_0^1 dx \int_0^{x^2} dy \frac{x}{x^3}$$

↑↑
volendo potrei fare
la primitiva

$$= \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx \int_0^{x^2} dy = \int_0^1 dx = 1, \text{ quindi converge } \odot$$

2° caso - bis

A come sopra

$$\iint_A \frac{x}{x^a+y^a} dx dy$$

Quando converge?

Come prima

$$\iint_A \frac{x}{x^a+y^a} dx dy \leq \int_0^1 dx \int_0^{x^2} dy \frac{x}{x^a} = \int_0^1 \frac{1}{x^{a-1}} \underbrace{\int_0^{x^2} dy}_{x^2} = \int_0^1 \frac{1}{x^{a-3}} dx$$

↑
sacrificio

e questo converge se e solo se $a-3 < 1$, cioè $a < 4$.

Quindi ho dimostrato che per $a < 4$ l'integrale dato converge.

RESTA da dimostrare che per $a \geq 4$ diverge.

Per $a \geq 4$ ho dimostrato che l'integrale dato è $\leq +\infty$ (no)

$$\iint_A \frac{x}{x^a+y^a} dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} dy \frac{x}{x^a+y^a} \geq \int_0^1 dx \int_0^{x^2} \frac{x}{x^a+x^{2a}} dy$$

↑
metto $y=x^2$

$$= \int_0^1 \frac{x}{x^a+x^{2a}} \cdot x^2 dx \text{ e questo diverge per } a \geq 4 \text{ perché si comporta come } \frac{x^3}{x^a} \cdot \text{VOLENDO } \geq \frac{x^3}{2x^a}$$