



Esempio 1 $B = B(0, 1) \quad \iiint_B \frac{xy}{(x^2+y^2+z^2)^2} dx dy dz$

Brutal mode: $f(x, y, z) \sim \frac{\rho^2}{\rho^4} = \frac{1}{\rho^2}$ quindi converge perché $2 < 3$

Oss 1: l'unico p.b. dell'integrale è in $(0, 0, 0)$

Oss 2: il segno non è costante, quindi dovrei spezzare in varie zone a seconda del segno di xy

Per simmetria basta studiare per $x \geq 0$ e $y \geq 0$ $\leadsto B_+$

Su B_+ usiamo coord. sferiche

$$\begin{aligned} \iiint_{B_+} f dx dy dz &= \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{\pi/2} d\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \frac{\cancel{\rho^2} \cos^2 \varphi \cos \theta \sin \theta}{\cancel{\rho^4}} \cancel{\rho^2} \cos \varphi \\ &= \int_0^1 d\rho \int_0^{\pi/2} d\theta \cos \theta \sin \theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 \varphi d\varphi \end{aligned}$$

Quindi converge e volendo si calcola il valore esatto

A questo punto l'integrale su tutto B fa 0 per simmetria

Achtung! Now posso fare compensazioni prima di aver stabilito la convergenza (potrebbe venire $+\infty - \infty$)

Esempio 1-bis Stabilire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ converge

$$\iiint_B \frac{xy}{(x^2+y^2+z^2)^a} dx dy dz$$

Brutal mode: $f \sim \frac{\rho^2}{\rho^{2a}} = \frac{1}{\rho^{2a-2}}$ che converge $\Leftrightarrow 2a-2 < 3$
 $\Leftrightarrow a < \frac{5}{2}$

Rigorosamente occorre dimostrare 2 cose (ENTRAMBE)

→ per $a < \frac{5}{2}$ converge

→ per $a \geq \frac{5}{2}$ non converge (in questo caso è indeterminato)



$a < \frac{5}{2}$ B_+ come prima ...

$$\iiint_{B_+} \dots = \int_0^1 \frac{1}{\rho^{2a-4}} d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin \theta d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi d\varphi$$

$2a-4 < 1$
 $2a < 5$
 $a < \frac{5}{2}$

Numero positivo

Quindi per $a < \frac{5}{2}$ converge su B_+ ma fa 0 su B

$a > \frac{5}{2}$ Con lo stesso conto otteniamo $\iiint_{B_+} \dots = +\infty$
e quindi $\iiint_B$ è indeterminato.

Esempio 2

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{x^8 |y|^a}{(x^2 + y^2 + z^2)^6} dx dy dz$$

Oss 1 $f \geq 0$ ovunque, quindi ok con i segni

Oss 2 Potenzialmente ci sono 2 problemi: nell'origine e all'infinito

Dividiamo l'integrale in 2:

B = solita palla

A = esterno della palla

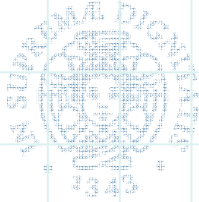
Brutale: $f \sim \frac{\rho^{8+a}}{\rho^{12}} = \frac{1}{\rho^{4-a}}$

→ se $a > 1$ converge in B
e diverge in A

→ se $a < 1$ diverge in B
e converge in A

→ se $a = 1$ allora diverge
ovunque

La dimostrazione è come prima. La parte trigonometrica è un numero positivo, quindi decide la potenza di ρ .



Esempio 2-bis

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\arctan(x^8 |y|^a)}{(x^2 + y^2 + z^2)^6} dx dy dz$$

Oss 1 e 2 sono come sopra

Brutal mode: $f \sim \frac{\rho^{8+a}}{\rho^{12}} \rightsquigarrow$ questa è corretta solo vicino a 0

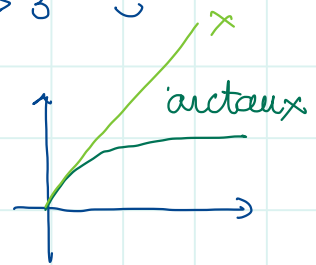
quindi come prima $\iiint_B$ $\begin{cases} \nearrow \text{converge se } a > 1 \\ \searrow \text{diverge se } a \leq 1 \end{cases}$

Per il pbm all'infinito $f \sim \frac{\frac{\pi}{2}}{\rho^{12}}$ e quindi nessun pbm. in A

1° fatto $\iiint_A \frac{\arctan(x^8 |y|^a)}{(x^2 + y^2 + z^2)^6} dx dy dz$ converge $\forall a \in \mathbb{R}$
 $\uparrow$
 esterno della palla

Infatti $\iiint_A \dots \leq \frac{\pi}{2} \iiint_A \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^6} dx dy dz$
 che converge perché $12 > 3$ ☺

2° fatto $\iiint_B \dots$ converge se $a > 1$



Infatti uso che $\arctan(t) \leq t$ per ogni $t \geq 0$
 e ottengo che

$$\iiint_B \dots \leq \iiint_B \frac{x^8 |y|^a}{(\dots)^6} dx dy dz = \text{studiato prima in coord. sferiche}$$

3° fatto $\iiint_B \dots$ diverge a $+\infty$ se $a \leq 1$



1° modo Osservo che $\arctan t \geq \frac{1}{2}t$ per ogni $t \in [0, 2]$

Ma allora $x^8 |y|^a \leq r$ in un intorno dell'origine $B(0, r_0)$

Ma allora

$$\iiint_B \dots \geq \frac{1}{2} \iiint_{B(0, r_0)} \frac{x^8 |y|^a}{(\dots)^6} dx dy dz = \text{studiato prima e diverge per } a \leq 1$$

2° modo Uso direttamente le sfere

$$\iiint_B \dots = \int_0^1 dp \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \frac{\arctan(\rho^{8+a} \cos^8 \varphi \cos^8 \theta \cos^a \varphi (\sin \theta)^a)}{\rho^{12}} \cdot \rho^2 \cos \varphi d\varphi$$

$$\geq \int_0^1 dp \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \frac{\arctan(\rho^{8+a} \dots)}{\rho^{10}} \underbrace{\cos \varphi d\varphi}_{\geq m > 0}$$

Queste scelte lasciano $\cos \theta$ e $\sin \theta$ lontani da 0

Queste scelte lasciano $\cos \varphi$ lontano da 0

per il SOLO DISCORSO

$$= \int_0^1 \frac{\arctan(m \rho^{8+a})}{\rho^{10}} \underbrace{m \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi}_{\text{numero positivo}}$$

Diverge per analisi 1 essendo $\sim \frac{m \rho^{8+a}}{\rho^{10}} = \frac{m}{\rho^{2-a}}$
per $a \leq 1$ DIVERGE

Esempio 2-ter $f(x, y, z) = \frac{\arctan(x^8 |y|^a)}{(x^2 + y^2 + z^2)^6}$

Domanda: $\rightarrow$ per quali valori di a f è limitata in B ?

(e quindi l'integrale in B NON è improprio)

$\rightarrow$ per quali valori di a ammette limite nell'origine

Risposte: limitata $\Leftrightarrow a \geq 4$

ammette limite $\Leftrightarrow a > 4$

$$f \sim \frac{\rho^{8+a}}{\rho^{12}} = \frac{\rho^a}{\rho^4}$$

Entrambe si dimostrano passando in coord. sferiche.

