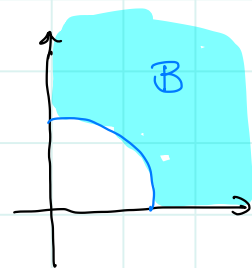




Esempio 1 $\iint_B \frac{xy^3}{x^7+y^7+1} dx dy$

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2 \geq 1\}$$



Brutal mode: $f(x,y) \sim \frac{\rho^4}{\rho^7} = \frac{1}{\rho^3}$, dunque CONVERGE ($3 > 2$)

Passando in coord. polari viene

$$\int_1^{+\infty} d\rho \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{\rho^4 \cos^3 \theta \sin^3 \theta}{1 + \rho^7 (\cos^7 \theta + \sin^7 \theta)} \rho$$

Non potendo semplificare i ρ , facciamo disuguaglianze

$$\leq \int_1^{+\infty} d\rho \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{\rho^4}{\rho^7 (\cos^7 \theta + \sin^7 \theta)} \rho$$

$\geq m > 0$ per il solito discorso

$\uparrow$
 num. + grande
 denom. + piccolo

$$\leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{\rho^2} d\rho \int_0^{\pi/2} \frac{1}{m} d\theta$$

$\uparrow$
 converge perché $2 > 1$

$\frac{1}{m} \cdot \frac{\pi}{2}$

Quindi l'integrale converge.

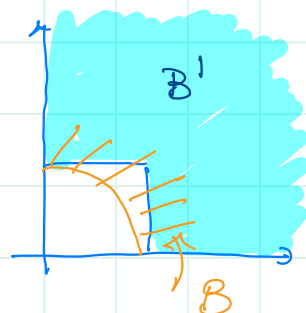
Oss. Questo non ci dice a cosa converge! Se proprio calcolassimo m , avremmo una stima dall'alto del valore a cui converge. In molte applicazioni però basta sapere che converge, senza trovare il valore.

Tra d'altro, una volta nota la convergenza, esistono algoritmi per trovare in maniera approssimata il valore.

Esempio 1 bis Lo stesso, al di fuori di un quadrato

Converge, basta osservare che

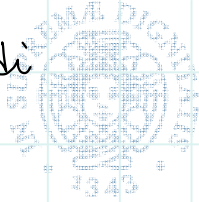
$$\iint_{B'} f(x,y) dx dy \leq \iint_B f(x,y) dx dy$$



Esempio 2 Sia Q il 1° quadrante. Studiare la convergenza di

$$\iint_Q \frac{1}{x^4 + y^2 + 1} dx dy$$

(int. improprio con unico problema all'infinito)



Brutal mode: cosa mette al denominatore?

p^2 $\rightsquigarrow$ diverge

p^4 $\rightsquigarrow$ converge



SLOGAN: cambio variabili in modo da PAREGGIARE gli esponenti

Poniamo $x = u$ e $y = v^2$. La zona di integr. resta $u \geq 0$ e $v \geq 0$.

Occorre calcolare J :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2v \end{pmatrix}$$

$$J = |\text{Det}| = 2v$$

Quindi

$$\iint_Q \frac{1}{x^4 + y^2 + 1} dx dy = \int_0^{+\infty} du \int_0^{+\infty} dv \frac{1}{u^4 + v^4 + 1} \cdot 2v$$

Brutal mode: $\frac{2v}{u^4 + v^4} \sim \frac{1}{p^3}$ 😊

L'integrale converge e si vede al solito modo

$$\int_0^{+\infty} dp \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{2p \sin \theta}{p^4 (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)} \quad p \uparrow \text{J delle polari}$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{p^2} dp \int_0^{\pi/2} \boxed{\frac{2 \sin \theta}{\cos^4 \theta + \sin^4 \theta}} d\theta$$

$$\leq \frac{2}{u}$$

↗ solito discorso

$$\leq \frac{2}{u} \cdot \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{p^2} dp$$

che converge.

Approccio alternativo: $\frac{1}{x^4+xy^2+1}$

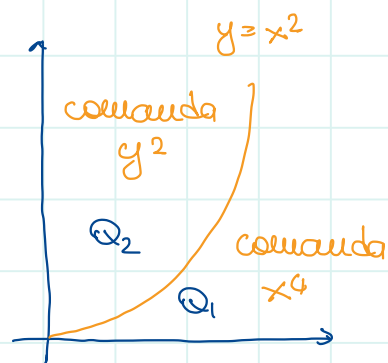
$$y^2 \geq x^4 \Leftrightarrow y \geq x^2$$

Chi comanda al denominatore? Dipende dalle zone!

Studiamo separatamente l'integrale in Q_1 e Q_2

$$\iint_{Q_1} \frac{1}{x^4+xy^2+1} dx dy \leq \iint_{Q_1} \frac{1}{x^4+1} dx dy$$

↑
sacrificio y^2 perché
conta meno



$$= \int_0^{+\infty} dx \int_0^{x^2} dy \frac{1}{x^4+1} = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1} dx = \text{converge per Analisi 1}$$

$\sim \frac{1}{x^2}$

$$\iint_{Q_2} \frac{1}{x^4+xy^2+1} dx dy \leq \iint_{Q_2} \frac{1}{y^2+1} dx dy$$

↑
sacrificio x^4

$$= \int_0^{+\infty} dy \int_0^{\sqrt{y}} dx \frac{1}{y^2+1} = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{y}}{y^2+1} dy = \text{converge}$$

$\sim \frac{1}{y^{3/2}}$ e $\frac{3}{2} > 1$

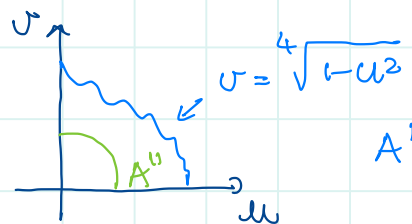
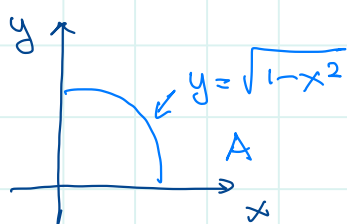
↑
Normale
asse y

Esempio 2-bis Lo stesso con zona di integrazione

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2 \geq 1\}$$

Quando pongo $x = u$ e $y = v^2$, la nuova zona di integrazione diventa

$$A' = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u \geq 0, v \geq 0, u^2+v^4 \geq 1\}$$



Ma ancora una volta posso sostituire con un insieme A'' che contiene A' e "fatto meglio"

Achtung! Quando si fanno i cambi di variabili negli integrali, occorre che il cambio di variabili sia iniettivo, altrimenti alcune parti contano doppio !!

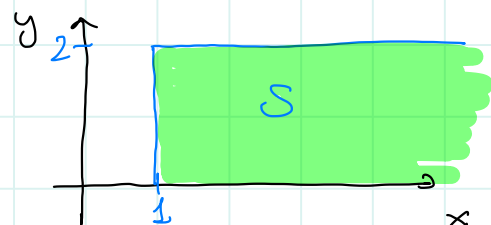
Esempio $\int_1^4 \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ Pongo $x=y^2$ da cui $dx=2y dy$

$$= \int_1^2 \frac{\sin y}{y} \cdot 2y dy \quad \text{I nuovi estremi sono 1 e 2}$$

Se avessi imposto $1 \leq x \leq 4 \leadsto 1 \leq y^2 \leq 4 \leadsto y \in [1, 2] \text{ e } y \in [-2, -1]$

Considero solo y^2 definita per $y \in [1, 2]$, così il cambio di variabili è iniettivo.

Esempio 3 $\iint_S \frac{xy}{x^3+y^3} dx dy$



dove $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 2\}$

Brutal mode : $f(x, y) \sim \frac{1}{\rho} \leadsto$ all'infinito diverge alla grande

Infatti converge ☹

$$\begin{aligned} \iint_S \frac{xy}{x^3+y^3} dx dy &= \int_1^{\infty} dx \int_0^2 dy \frac{xy}{x^3+y^3} \\ &= \int_1^{\infty} x dx \int_0^2 dy \frac{y}{x^3+y^3} \end{aligned} \quad \text{☹}$$

Torniamo indietro

num + grande
denom + piccolo

$$\int_1^{\infty} dx \int_0^2 dy \frac{xy}{x^3+y^3} \leq \int_1^{\infty} dx \int_0^2 dy \frac{2x}{x^3} = 2 \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx \int_0^2 dy$$

converge = 2

— 0 — 0 —